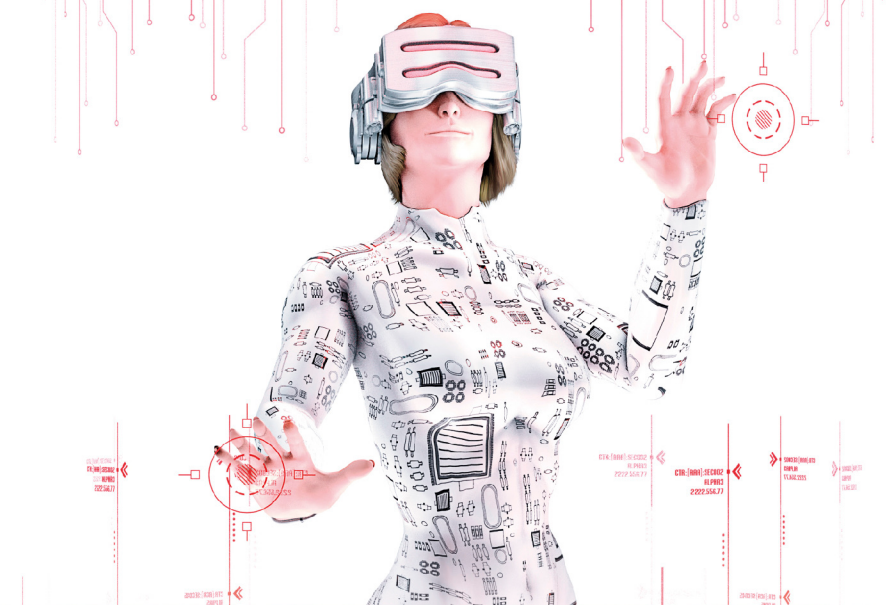




ADVANCE MATHS

ม.ต้น เข้มข้น เนื้อหา + ข้อสอบ **มั่นใจเต็ม 100**

สรุปเนื้อหาเฉพาะทางสำหรับเน้นการแก้โจทย์คณิตศาสตร์
ในระดับยาก ใช้ได้ทั้งการสอบเข้า ม.4 และการสอบแข่งขัน
ทางวิชาการในระดับเข้มข้น

ฝึกฝนการทำโจทย์ในแต่ละเรื่องจากแนวข้อสอบคณิตศาสตร์
เข้า ม.4 โรงเรียนชั้นนำ, IJSO และ สอวน. ที่เคยออกสอบมาแล้ว

เข้มข้นกับเนื้อหาที่ปรับปรุงใหม่เพื่อการสอบในระดับสูงโดยเฉพาะ พร้อมแนวข้อสอบในแต่ละบทที่คัดสรรจากสนามสอบ
คณิตศาสตร์ระดับยากอย่างเตรียมอุดมศึกษา, มหิดลวิทยานุสรณ์, จุฬาราชวิทยาลัย และสนามสอบโอลิมปิกวิชาการ
พร้อมเสริมความเข้าใจในกระบวนการคิดด้วยการอธิบายด้วยสีทั้งเล่ม

สารบัญ

บทที่

1

จำนวนและพีชคณิต



➤ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น.....	2
• โครงสร้างของระบบจำนวนในคณิตศาสตร์	
• เลขโดดและค่าประจำหลัก	
• เศษส่วนและทศนิยม	
• การหาเศษส่วนจากทศนิยมซ้ำอนันต์	
➤ พหุนาม	5
• การหาร	
• หลักการ PEMDAS	
➤ ทฤษฎีกรุปเบื้องต้น	9
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (จำนวนและพีชคณิต) ชุดที่ 1	10
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (จำนวนและพีชคณิต) ชุดที่ 1	12
• เฉลยอย่างละเอียด	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (จำนวนและพีชคณิต) ชุดที่ 2.....	20
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (จำนวนและพีชคณิต) ชุดที่ 2	22
• เฉลยอย่างละเอียด	

บทที่

2

สมการ



➤ สมการพหุนามดีกรีสอง.....	34
• สูตรการแก้สมการพหุนามดีกรีสอง	
➤ สมการพหุนามดีกรีสาม.....	37
➤ ระบบสมการเชิงเส้น	38
➤ พหุนามสมมาตร.....	39
• พหุนามสมมาตรขั้นมูลฐาน	

➤ แนวข้อสอบ Advance Math (สมการ) ชุดที่ 1.....	41
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (สมการ) ชุดที่ 1	44
• เฉลยอย่างละเอียด	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (สมการ) ชุดที่ 2.....	55
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (สมการ) ชุดที่ 2.....	58
• เฉลยอย่างละเอียด	

บทที่ 3

การวัดและเรขาคณิต



➤ เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น	74
• ระบบพิกัดฉาก	
• สมการเส้นตรง	
• สมการเส้นโค้งพาราโบลา	
➤ การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม	78
➤ เส้นแบ่งรูปสามเหลี่ยม	78
• ทฤษฎีบทของสจ๊วต	
➤ มัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม	80
• จุดเซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์	
• ทฤษฎีบทของเฮวา	
• ทฤษฎีบทของเมนเนลอส	
➤ ตรีโกณมิติพื้นฐานสำหรับเรขาคณิตเบื้องต้น.....	82
• กฎของ Sine และ Cosine	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (การวัดและเรขาคณิต) ชุดที่ 1	83
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (การวัดและเรขาคณิต) ชุดที่ 1	87
• เฉลยอย่างละเอียด	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (การวัดและเรขาคณิต) ชุดที่ 2	104
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (การวัดและเรขาคณิต) ชุดที่ 2	107
• เฉลยอย่างละเอียด	

บทที่

4

ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน



- สามเหลี่ยมมุมฉาก 126
- วงกลมหนึ่งหน่วย 126
- ฟังก์ชัน 127
 - ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- เอกลักษณะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 129
- แนวข้อสอบ Advance Math (ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน) ชุดที่ 1 131
 - เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน) ชุดที่ 1 133
 - เฉลยอย่างละเอียด
- แนวข้อสอบ Advance Math (ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน) ชุดที่ 2 141
 - เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน) ชุดที่ 2 143
 - เฉลยอย่างละเอียด

บทที่

5

คอมบินาทอริกเบื้องต้น



- หลักการนับ 154
 - หลักการเรียงนกพิราบ
 - การนับจำนวนเหตุการณ์ (หลักการบวกและหลักการคูณ)
- แฟกทอเรียล 156
- การสับเปลี่ยนและการเลือก 157
 - การสับเปลี่ยน
 - การเลือก (การจัดหมู่)
 - วิธี Star & Bar
- แนวข้อสอบ Advance Math (คอมบินาทอริกเบื้องต้น) ชุดที่ 1 160
 - เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (คอมบินาทอริกเบื้องต้น) ชุดที่ 1 162
 - เฉลยอย่างละเอียด

➤ แนวข้อสอบ Advance Math (คอมบินาทอริกเบื้องต้น) ชุดที่ 2	173
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (คอมบินาทอริกเบื้องต้น) ชุดที่ 2.....	175
• เฉลยอย่างละเอียด	

บทที่

6

สถิติ



➤ ตัวแทนของข้อมูล	188
• ค่าเฉลี่ย	
• มัธยฐาน	
• ฐานนิยม	
• ค่ากึ่งกลางพิสัย	
• ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม	
➤ การวัดตำแหน่งของข้อมูล	196
• การแบ่งส่วน	
➤ การวัดการกระจายตัวของข้อมูล	197
• การวัดการกระจายตัวของข้อมูลแบบสัมบูรณ์	
• การวัดการกระจายตัวของข้อมูลแบบสัมพัทธ์	
• การวัดการกระจายตัวแบบอื่น ๆ	
• สหสัมพันธ์	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (สถิติ) ชุดที่ 1	202
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (สถิติ) ชุดที่ 1.....	204
• เฉลยอย่างละเอียด	
➤ แนวข้อสอบ Advance Math (สถิติ) ชุดที่ 2	213
เฉลยแนวข้อสอบ Advance Math (สถิติ) ชุดที่ 2.....	215
• เฉลยอย่างละเอียด	



บทที่

1

จำนวนและพีชคณิต





ตัวอย่าง จงหาเศษส่วนของ $0.89\bar{1}$

วิธีทำ $0.89\bar{1} = 0 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

ซึ่งถ้าสังเกตให้ดี จะพบว่า 8 จะมีพหุคูณเป็น $\frac{1}{10}$

9 จะมีพหุคูณเป็น $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

1 จะมีพหุคูณเป็น $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

ดังนั้น จะได้ว่า $0.89\bar{1} = 0 + \frac{8}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \dots$

ซึ่งจะมีเลขชี้กำลังห่างกันทีละ 3 ทำให้สามารถจัดรูปใหม่ได้ว่า

$$0.89\bar{1} = 0 + \left(\frac{8}{10} + \frac{8}{10^4} + \dots \right) + \left(\frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

$$0.89\bar{1} = 0 + 8 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^4} + \dots \right) + 9 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^5} + \dots \right) + 1 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

ให้ $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^4} + \dots = A \quad \dots(1)$

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^5} + \dots = B \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots = C \quad \dots(3)$$

นำ 10 คูณ (2) และนำ 100 คูณ (3) จะได้

$$10B = 100C = A$$

ดังนั้น หา A ด้วยวิธีฮิวริสติกจากกระบวนการวนซ้ำ (Recursive Method)

โดยจัดรูปด้วยการคูณสมการ (1) ด้วย $\frac{1}{1000}$ จะได้

$$\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^7} + \dots = \frac{1}{1000} A \quad \dots(4)$$

เมื่อนำไปเทียบกับ (1) จะได้

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{1000} A = A$$

จะได้ $\frac{1}{10} = \left(1 - \frac{1}{1000} \right) A$

$$\frac{1}{10} = \frac{999}{1000} A$$

$$A = \frac{1000}{9990}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $-4x^2 - 16x - 18$

วิธีทำ **วิธีที่ 1 :** จัดรูปพหุนามให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$\begin{aligned} -4x^2 - 16x - 18 &= -4\left(x^2 + 4x + \frac{18}{4}\right) \\ &= -4\left[\left(x^2 + 2(2)x + (2)^2\right) - (2)^2 + \frac{9}{2}\right] \\ &= -4\left[\left(x + 2\right)^2 - 4 + \frac{9}{2}\right] \\ &= -4\left(x + 2\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

จะพบว่า เมื่อ $x = -2$ จะทำให้ $x + 2 = 0$ และจะได้ค่าเป็น -2 ซึ่งเป็นค่ามากที่สุด

วิธีที่ 2 : ค่า x ที่ทำให้พหุนาม $-4x^2 - 16x - 18$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-4)} = -2$$

แทนค่า x กลับไปในพหุนาม จะได้

$$-4(-2)^2 - 16(-2) - 18 = -16 + 32 - 18 = -2$$

สมการพหุนามดีกรีสาม

สมการพหุนามดีกรีสาม คือ สมการที่มีคำตอบ 3 คำตอบ โดยสามารถพิจารณาได้จาก

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นพหุนามโมนิกได้ว่า

$$x^3 + \left(\frac{b}{a}\right)x^2 + \left(\frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{d}{a}\right) = 0 \quad \dots(1)$$

สมมติให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นคำตอบของสมการดังกล่าว จะได้ว่า

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0$$

และถ้าหากคูณกัน จะได้

$$x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0 \quad \dots(2)$$

เทียบ (1) กับ (2) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{b}{a} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\frac{c}{a} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$$

$$\frac{d}{a} = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

ซึ่งถ้าสังเกตจะพบว่า ในกรณีทั่วไป (ที่สามารถแยกตัวประกอบเพื่อหาคำตอบของ x ได้) จะทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\text{ผลบวกของราก (คำตอบ)} = -k_2 \quad \text{ผลคูณของราก (คำตอบ)} = (-1)^n k_n$$

เมื่อ k_2 คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามโมนิกตัวที่สองถัดจากดีกรีสูงสุด

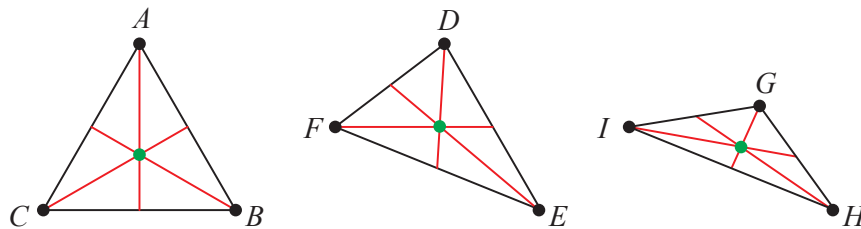
k_n คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามโมนิกตัวสุดท้าย (ที่มีเฉพาะตัวเลข)

n คือ จำนวนดีกรี (เลขชี้กำลังสูงสุด)



มาตรฐานของรูปสามเหลี่ยม

จุดเซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์

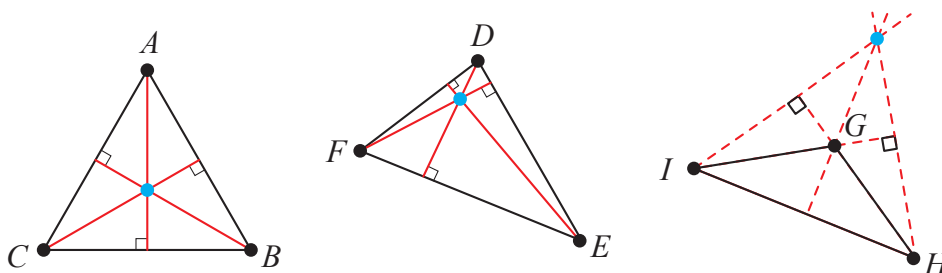


เส้นเซเวียน (Cevian) : เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดไป “แบ่งครึ่ง” กับด้านตรงข้ามมุม

จุดเซนทรอยด์ (Centroid) : จุดศูนย์กลางที่เกิดจากการตัดกันของเส้นเซเวียน



ข้อควรรู้ : จุดเซนทรอยด์จะเป็นจุดที่อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมเสมอ



จุดออร์โทเซนเตอร์ (Orthocenter) : จุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นเซเวียนที่ “แบ่งครึ่ง + ตั้งฉาก” แต่ละด้าน



ข้อควรรู้ : สำหรับสามเหลี่ยมที่มีลักษณะเป็นมุมป้าน จุดออร์โทเซนเตอร์จะอยู่นอกรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบทของเซวา

ทฤษฎีบทของเซวา (Ceva's Theorem) ใช้ในการหาด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ถูกแบ่งโดยเส้นเซเวียน (Cevian Line) ซึ่งเป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมสามเหลี่ยมและทั้งหมดจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งภายในสามเหลี่ยมนั้น โดยเราจะเรียกจุดดังกล่าวว่า “จุดมัธฐาน หรือจุดเซนทรอยด์”

แนวข้อสอบ Advance Math (ตรีโกณมิติและฟังก์ชัน)

ชุดที่ 2

- กำหนดให้ A และ B เป็นมุมแหลมซึ่ง $\frac{1}{3} + \sin^2 A = \frac{1}{4} \sin^2 B + \frac{1}{2} \sin A(1 + \cos B)$ แล้ว $27(\sin^2 A + \cos^2 B)$ มีค่าเท่าใด
 - 6
 - 12
 - 18
 - 24
 - 30
- กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{\sec \theta - \cos \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 0$ แล้ว $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta$ มีค่าเท่าใด
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7
 - 8
- กำหนดให้ $5(\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) = 2(\sec^4 \theta - \tan^4 \theta)$ แล้ว $\frac{\operatorname{cosec}^4 \theta - \cot^4 \theta}{3}$ มีค่าเท่าใด
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- ให้สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $a = BC$, $b = AC$ และ $c = AB$ ถ้า $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} = \frac{3}{a+b+c}$ จงหาว่ามุม B กว้างกี่องศา
 - 30
 - 45
 - 60
 - 90
 - 120
- กำหนดให้ $\cos A + \cos^2 A = 1$ แล้ว $5\sin^{12} A + 8\sin^{10} A$ มีค่าเท่ากับเท่าไร
 - 0.25
 - 0.5
 - 0.75
 - 1
 - 1.25
- กำหนดให้ $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ โดยที่ $\tan \theta(1 - \sin \theta) = \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}$ ถ้า $\sin 2\theta$ มีค่าเท่ากับ $\frac{m\sqrt{5}}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม. m, n มีค่าเท่ากับ 1 แล้ว จงหาค่าของ $m + n$ กำหนดให้ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$, $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$
 - 11
 - 13
 - 15
 - 17
 - 19
- กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มี $AB = 2$, $AC = 3$ และ $BC = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $\sin^2 \frac{C}{2}$ กำหนดให้ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$
 - $\frac{1}{128}$
 - $\frac{1}{64}$
 - $\frac{1}{32}$
 - $\frac{1}{16}$
 - $\frac{1}{8}$



การเลือก (การจัดหมู่)

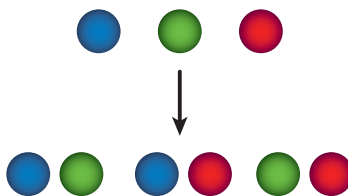
การเลือก เป็นการนับเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่มีคุณสมบัติเช่นเดียวกับการสับเปลี่ยน แต่มีข้อแตกต่างที่ว่า “**ไม่มีการกำหนดลำดับ**” ดังนั้น สูตรที่ใช้สำหรับการเลือก จึงเป็นสูตรเดียวกันกับสูตรการสับเปลี่ยน เพียงแต่ “**เอาลำดับของเหตุการณ์ออก**” (จากหลักการคูณสำหรับเหตุการณ์ที่ขึ้นต่อกัน เมื่อนับเพิ่มคือคูณเข้า ดังนั้น เมื่อหักออกจึงหมายถึงหารออก) ตามสมการ

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง นำลูกบอล 3 ลูกที่แตกต่างกัน เลือกมาทีละ 2 ลูก จะได้กี่วิธี

วิธีทำ จากโจทย์ จะสามารถหาได้ว่าจำนวนวิธีในการเลือกคือ

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \text{ วิธี}$$



หากสังเกตจากรูปตัวอย่างของการสับเปลี่ยนลูกบอล จะเห็นว่า “ลูกบอลสีที่ซ้ำกันจะถูกหักออก” ซึ่งหมายความว่า ในสูตรของการเลือกนี้ จะไม่สนใจลูกบอลสีที่ซ้ำกัน แม้ว่าจะมีการสลับตำแหน่งกัน (ซึ่งก็หมายถึงหักการสลับลำดับออกไปนั่นเอง)

วิธี Star & Bar

วิธี Star & Bar เป็นเทคนิคที่ถูกคิดค้นขึ้นมาโดย William Feller เพื่อใช้อธิบายปัญหาสำหรับการใส่ของ n สิ่ง (แทนด้วยรูปดาวหรือ Star) ลงในกล่อง r กล่อง (แทนด้วยไม้กั้นกล่องหรือ Bar) ซึ่งจะมีหลักการดังนี้

ตัวอย่าง นำลูกบอล 3 ลูก มาใส่กล่อง 2 กล่อง จะได้กี่วิธี

วิธีทำ ขั้นที่ 1 : กำหนดให้ ลูกบอล = ★ และไม้กั้นกล่องแทนด้วย | จะได้

★ | ★ ★ (รูปแบบวิธีหนึ่งของการแบ่ง)

ซึ่งเราจะเห็นว่า หาก “จำนวนกล่อง” คือ 2 กล่อง จะแทนด้วยไม้กั้น 1 อัน หรือ

ใช้ไม้กั้น = จำนวนกล่อง - 1 = 2 - 1 อัน

ขั้นที่ 2 : มองว่า n = ผลรวมของ ★ และ | จะได้ว่า ในตัวอย่างนี้ $n = 4$

ขั้นที่ 3 : นำลำดับของ ★ (มี 3 อัน) และ | (มี 1 อัน) ออกไป ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{4!}{3!1!} = \binom{3+(2-1)}{2-1} = 4 \text{ วิธี}$$

เมื่อลองเรียง ★ และ | ตามโจทย์ จะได้ว่า ลักษณะการนำลูกบอล 3 ลูก มาใส่กล่อง 2 กล่อง มีดังนี้

1. ★ ★ ★
2. ★ | ★ ★
3. ★ ★ | ★
4. ★ ★ ★ |



10. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมี 20 จำนวน โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 40 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4 แต่พบจุดที่ผิด 4 แห่งคือ ข้อมูล 9 อ่านผิดเป็น 2, ข้อมูล 4 อ่านผิดเป็น 8, ลืมอ่านข้อมูลไป 1 ค่าคือ 3 และอ่านข้อมูลเกินมา 1 ค่าคือ 4 อยากทราบว่ากำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ถูกต้องมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 6.66

2. 7.07

3. 8.48

4. 9.09

5. 10.11

วิธีทำ จากสูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

ดังนั้น

$$40 = \frac{\sum x}{20}$$

$$\sum x = 800$$

จากสูตรส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$SD = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ดังนั้น

$$4 = \sqrt{\frac{\sum x^2}{20} - 40^2}$$

$$16 = \frac{\sum x^2}{20} - 1600$$

$$\sum x^2 = 32,320$$

แต่เนื่องจากมีข้อมูลที่ผิดอยู่ 4 ข้อมูล ดังนั้น จะได้ค่าผลรวมที่ถูกต้อง ดังนี้ (สีเขียวคือ บวกค่าที่ถูกเข้าไป ส่วนสีแดงคือ ลบค่าที่อ่านผิดออก)

$$\sum x = 800 + 9 - 2 + 4 - 8 + 3 - 4 = 802$$

$$\sum x^2 = 32,320 + 9^2 - 2^2 + 4^2 - 8^2 + 3^2 - 4^2 = 32,342$$

ดังนั้น จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้องคือ

$$\bar{x} = \frac{802}{20} = 40.1$$

และจะได้กำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ถูกต้องคือ

$$SD^2 = \frac{32,342}{20} - 40.1^2 = 9.09$$