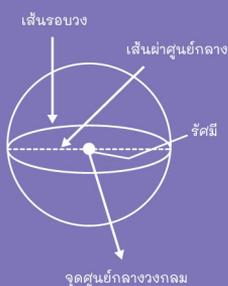
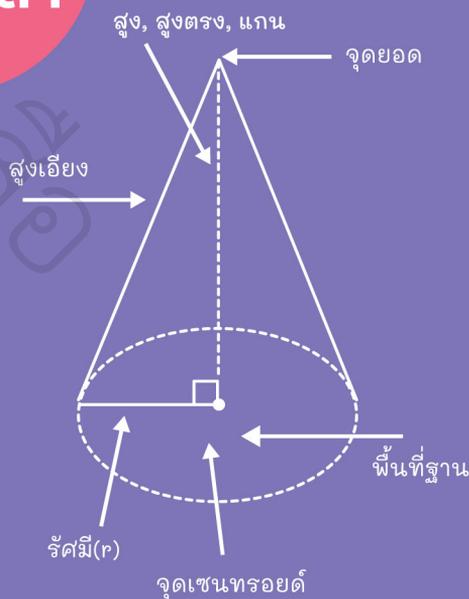
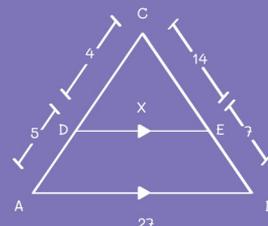


แผนภาพช่วยจำ

คณิต

ม.3

จำง่าย
สบายตา



- สรุปเนื้อหาเป็นแผนภาพแบบกระชับ เพื่อให้เข้าใจและจดจำง่าย
- ช่วยลดระยะเวลาในการอ่านหนังสือทบทวนก่อนสอบ
- ใช้เตรียมความพร้อมในการสอบเพิ่มคะแนนทั้งกลางภาคและปลายภาค
- ภาพประกอบชัดเจนสวยงาม การจัดวางเนื้อหาอ่านง่าย สบายตา

อ.จุมพล ปรีชานุกูล

สารบัญ

แผนภาพ

8

บทที่ 1 อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 9

- 1.1 แนะนำอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 10
- 1.2 คำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 10
- 1.3 การแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 11
- 1.4 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 11

บทที่ 2 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง 20

- 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกและผลต่างของกำลังสาม 21
- 2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม 21

บทที่ 3 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว 25

- 3.1 แนะนำสมการกำลังสองตัวแปรเดียว 26
- 3.2 การแก้อสมการกำลังสองตัวแปรเดียว 26
- 3.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว 26

บทที่ 4 ความคล้าย (~) 43

- 4.1 รูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน 44
- 4.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน 44
- 4.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน 44

บทที่ 5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง 48

- 5.1 แนะนำฟังก์ชัน 49
- 5.2 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (พาราโบลา) 49

บทที่ 6 สถิติ (3) 58

- 6.1 แผนภาพกล่อง 59
- 6.2 การอ่านและแปลความหมายจากแผนภาพกล่อง 59

บทที่ 7 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 68

- 7.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 69
- 7.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 70
- 7.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 70

บทที่ 8 วงกลม 78

- 8.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม 79
- 8.2 คอร์ดของวงกลม 80
- 8.3 เส้นสัมผัสวงกลม 80

บทที่ 9 พีระมิด กรวย และทรงกลม 86

- 9.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด 87
- 9.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย 87
- 9.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม 87

บทที่ 10 ความน่าจะเป็น 101

- 10.1 โอกาสของเหตุการณ์ 102
- 10.2 ความน่าจะเป็น 102

บทที่ 11 อัตราส่วนตรีโกณมิติ 108

11.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	109
11.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม	110
11.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา	110

แบบฝึกหัด 116

แบบฝึกหัดบทที่ 1 อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	117
แบบฝึกหัดบทที่ 2 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง	119
แบบฝึกหัดบทที่ 3 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว	122
แบบฝึกหัดบทที่ 4 ความคล้าย (~)	125
แบบฝึกหัดบทที่ 5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	129
แบบฝึกหัดบทที่ 6 สถิติ (3)	131
แบบฝึกหัดบทที่ 7 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	136
แบบฝึกหัดบทที่ 8 วงกลม	139
แบบฝึกหัดบทที่ 9 พีระมิด กรวย และทรงกลม	144
แบบฝึกหัดบทที่ 10 ความน่าจะเป็น	147
แบบฝึกหัดบทที่ 11 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	150

บทที่ 1

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1.1 หมายความว่าอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดู EX.1

- $x < a$ → น้อยกว่า, ไม่ถึง
 $x \leq a$ → น้อยกว่าหรือเท่ากับ, ไม่เกิน, ไม่มากกว่า, อย่างมาก a
 $x > a$ → มากกว่า, เกิน
 $x \geq a$ → มากกว่าหรือเท่ากับ, ไม่น้อยกว่า, มีค่าอย่างน้อย a , ตั้งแต่ a ขึ้นไป
 $x \neq a$ → ไม่เท่ากับ



1.2 คำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดู EX.2

เส้นจำนวน น้อยกว่า มากกว่า ไม่มีเท่ากับ มีเท่ากับ

1.3 การแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ดู EX.3

ทำทุกอย่างเหมือน สมการ ยกเว้น คูณหรือหารด้วยจำนวนติดลบ ต้องกลับเครื่องหมาย

< เปลี่ยนเป็น >
 <= เปลี่ยนเป็น >=
 > เปลี่ยนเป็น <
 >= เปลี่ยนเป็น <=

1.4 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ดู EX.4

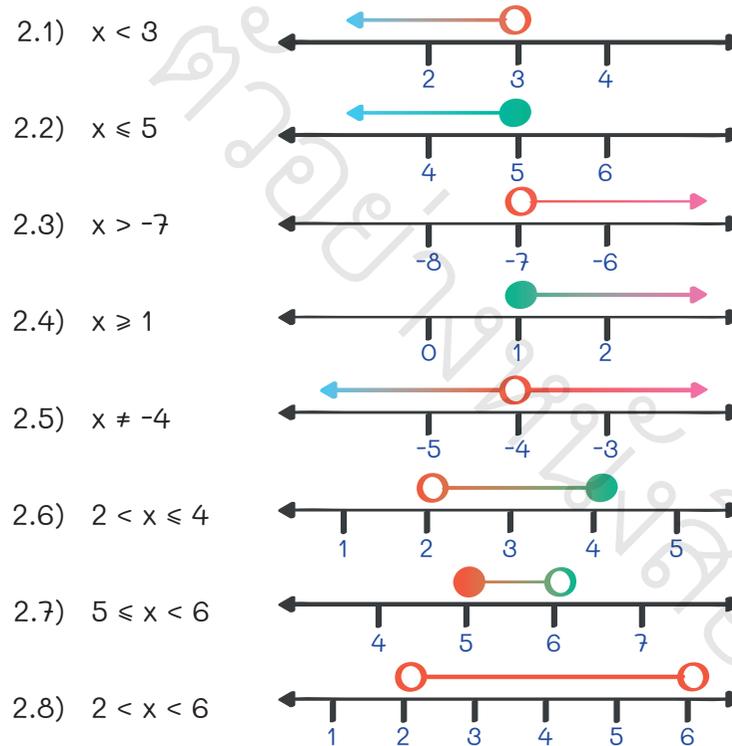
- อ่านโจทย์
- กำหนดตัวแปร
- สร้างอสมการ
- แก้อสมการ
- ตรวจสอบคำตอบ



* อสมการปนกับสมการ ให้จัดรูปสมการ แล้วแทนค่าในอสมการด้วยตัวแปรที่โจทย์ถาม ดู EX.5

* ระวังอสมการซ้อนอสมการ ดู EX.6

EX.2 จงเขียนกราฟแสดงคำตอบของอสมการต่อไปนี้



EX.3 จงแก้สมการต่อไปนี้และเขียนกราฟแสดงคำตอบ

$$3.1) \frac{3x - 1}{4} > 5$$

$$\frac{3x - 1}{4} > 5$$

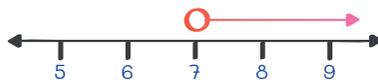
$$3x - 1 > 20$$

$$3x > 21$$

$$x > 7$$

∴ คำตอบคือ $x > 7$ (ทุกจำนวนที่มากกว่า 7)

กราฟแสดงคำตอบคือ



บทที่ 3

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

3.1 แนะนำสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ดู EX.1

สมการคือ $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$

3.2 การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

แทนค่าต้องเป็นจริง ดู EX.2

แยกตัวประกอบ และถ้า $m \cdot n = 0$ จะได้ $m = 0$ หรือ $n = 0$ ดู EX.3

กำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสอง ดู EX.4

ใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ถ้ามี 1 คำตอบ $b^2 - 4ac = 0$ ดู EX.5ถ้ามีคำตอบ $b^2 - 4ac \geq 0$ ถ้าไม่มีคำตอบ $b^2 - 4ac < 0$ หรือใน $\sqrt{\quad}$ ติดลบ คือไม่มีคำตอบ

3.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ดู EX.6

กำหนดตัวแปร

สร้างสมการ

แก้สมการ

ตรวจคำตอบตามเงื่อนไขหรือความเป็นจริง



EX.1 ตามการสมการที่กำหนดให้ข้อใดเป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ถ้าไม่เป็นให้ใส่ \times
 ถ้าเป็นให้ใส่ และจัดรูปเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ พร้อมทั้งระบุค่า a, b และ c

ข้อ	สมการ	เป็นหรือไม่เป็น	จัดรูป	a	b	c
1	$-y^2 + 14 + 7y = 0$					
2	$0 = 6x^2 - 5$					
3	$x^2 = 2x - 8$					
4	$a = 2a + 3$					
5	$t(t - 1) = 3$					
6	$x^2 - 3x = 8 + x$					
7	$w^2 - 8w = 9 + w^2$					
8	$x^3 - 5x + 7 = 0$					
9	$2y^2 - 4y = 8$					
10	$12a - a^2 = 9$					



วิธีทำ

$$2.1) \quad x^2 - 6x - 7 = 0 \quad \text{ลองแทน } x = 7 \quad \text{จะได้} \quad 7^2 - 6(7) - 7 = 0$$

$$49 - 42 - 7 = 0$$

$$0 = 0$$

สมการเป็นจริง

$$\text{ลองแทน } x = -1 \quad \text{จะได้} \quad (-1)^2 - 6(-1) - 7 = 0$$

$$1 + 6 - 7 = 0$$

$$0 = 0$$

สมการเป็นจริง

\therefore ทั้ง 7 และ -1 เป็นคำตอบของสมการ

$$2.2) \quad 2y^2 = 15 + 7y \quad \text{ลองแทน } y = 5 \quad \text{จะได้} \quad 2(5^2) = 15 + 7(5)$$

$$50 = 50$$

สมการเป็นจริง

$$\text{ลองแทน } y = \frac{-3}{2} \quad \text{จะได้} \quad 2\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 15 + 7\left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$\frac{9}{2} = 15 - \left(\frac{21}{2}\right)$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

สมการเป็นจริง

\therefore ทั้ง 5 และ $\frac{-3}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ



วิธีทำ

4.1) จะเขียนขั้นตอนการทำงานและวิธีทำควบคู่กันไป

ขั้นตอนการทำงาน	วิธีทำ
1. จัดรูปสมการให้เป็น $x^2 + bx + c = 0$ (ถ้าเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ ให้เอา a หารตลอด)	จัดรูปได้ $4x^2 + 8x + 12 = 0$ เอา 4 หารตลอดได้ $x^2 - 2x - 3 = 0$
2. เข้าสูตร $n^2 \pm 2nl + l^2 = (n \pm l)^2$ โดยเขียน $x^2 \pm 2x \left(\frac{\text{เอาเลขหน้า } x}{2} = l \right) + l^2 - l^2 + c = 0$ $(x \pm l)^2 - \square$	$x^2 - 2x\left(\frac{2}{2}\right) + 1^2 - 1^2 - 3 = 0$ $x - 2x(1) + 1^2 - 1 - 3 = 0$ $(x - 1)^2 - 4 = 0$
3. เข้าสูตร $n^2 - l^2 = (n - l)(n + l)$	$(x - 1)^2 - 2^2 = 0$
4. ใช้สมบัติ $M \cdot N = 0$ จะได้ $M = 0$ หรือ $N = 0$ แก้สมการหาค่า x	$(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x - 3 = 0$ หรือ $x + 1 = 0$ $x = 3$ $x = -1$ \therefore คำตอบของสมการคือ 3 และ -1

บทที่ 8

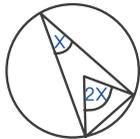
วงกลม

8.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม **ดู EX.1**

ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่าทุกประการ ถ้าส่วนโค้งเท่ากัน



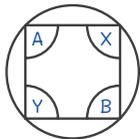
มุมที่ส่วนโค้งจะเท่ากันเสมอ



มุมที่จุดศูนย์กลางจะเป็น 2 เท่า ของมุมที่ส่วนโค้ง



มุมในครึ่งวงกลมเท่ากับ 90 องศา



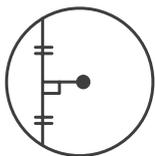
สี่เหลี่ยมแนบในวงกลม จะได้ $A + B = 180^\circ$ และ $X + Y = 180^\circ$



8.2 คอร์ดของวงกลม

ดู EX.2

คอร์ดยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อห่างจากศูนย์กลางเท่ากัน



เส้นตรงที่ลากมาจากจุดศูนย์กลาง จะตั้งฉากกับคอร์ดก็ต่อเมื่อ
เส้นตรงนั้นแบ่งคอร์ดเป็น 2 ส่วนเท่ากัน

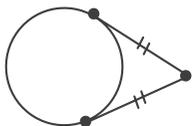


8.3 เส้นสัมผัสวงกลม

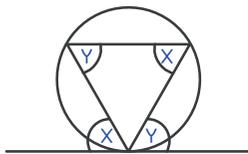
ดู EX.3



เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

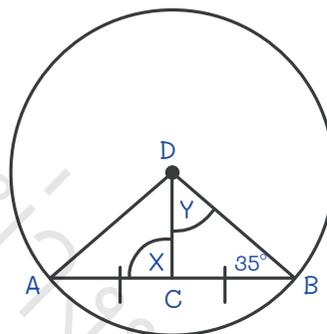


ส่วนของเส้นตรง 2 เส้นที่ลากจากจุดภายนอกมาสัมผัสกับวงกลมวงเดียวกัน
จะยาวเท่ากัน



มุมที่เกิดจากคอร์ด และเส้นสัมผัสจะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังรูป

EX.2 จากวงกลมที่กำหนดให้ จงหาค่า x และ y



วิธีทำ

$x = 90^\circ$ เส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางวงกลมมาแบ่งครึ่งคอร์ดย่อมตั้งฉากกับคอร์ด

$$\widehat{BCD} + 90^\circ = 180^\circ \text{ มุมตรง}$$

$$\widehat{BCD} = 90^\circ$$

$$y + 90^\circ + 35^\circ = 180^\circ \text{ ผลบวกมุมภายในรูป}$$

$$y = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ)$$

$$y = 55^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ \text{ และ } y = 55^\circ$$

บทที่ 11

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

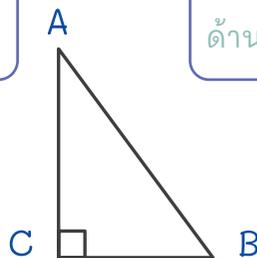
ใน ม.ต้น จะเป็นรูป  เท่านั้น

ใช้ความรู้เก่าเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

11.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ดู EX.1

ด้านประชิดมุม A (ชิดA)
ด้านตรงข้ามมุม B (ข้ามB)



ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)
ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)

ด้านตรงข้ามมุม A (ข้ามA)
ด้านประชิดมุม B (ชิดB)

$$\sin A = \frac{\text{ข้ามA}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$
$$\cos A = \frac{\text{ชิดA}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$
$$\tan A = \frac{\text{ข้ามA}}{\text{ชิดA}} = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AC}$$

11.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม (จากรูป = จากการจำได้, ตาราง)

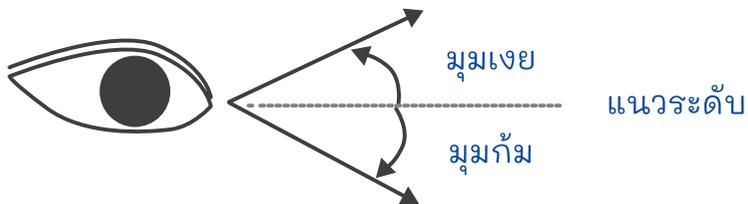
ดู EX.2, EX.3

อัตราส่วนตรีโกณ	$A = 0^\circ$	$A = 30^\circ$	$A = 45^\circ$	$A = 60^\circ$	$A = 90^\circ$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	หาค่าไม่ได้ ∞

*อาจใช้การนับนิ้วช่วยในการจำ

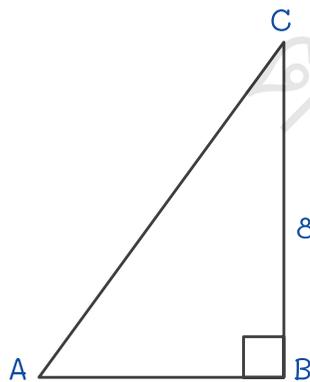
11.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา (ถ้าไม่ระบุความสูงถือว่าเป็น 0)

ดู EX.4, EX.5



ex.1 จากรูป $\triangle ABC$ มีมุม B เป็นมุมฉาก BC ยาว 8 นิ้ว และ $\triangle ABC$ มีพื้นที่ 24 ตารางนิ้ว
จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$ และ $\tan C$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \text{จากพื้นที่ } \triangle &= \frac{1}{2} (\text{ฐาน})(\text{สูง}) \\ 24 &= \frac{1}{2} (AB)8 \\ 6 &= AB \end{aligned}$$

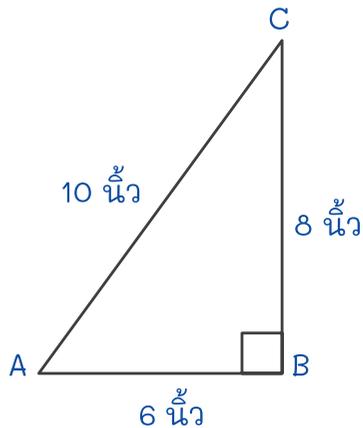
8 นิ้ว

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$AC^2 = 100$$

$$AC = 10$$



จะได้

$$\sin A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\sin C = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos C = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan C = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



แบบฝึกหัดบทที่ 1

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1 จงแก้สมการ $\frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 4}{3}$

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1. ทุกจำนวนที่ไม่เกิน 10 | 2. ทุกจำนวนที่ไม่ถึง 10 |
| 3. ทุกจำนวนที่ไม่น้อยกว่า -10 | 4. ทุกจำนวนที่มากกว่า -10 |

2 จงแก้สมการ $5\left(4x + \frac{2}{5}\right) < 7(x - 2) + 94$

- | | |
|------------|-------------|
| 1. $x < 6$ | 2. $x < 12$ |
| 3. $x > 6$ | 4. $x > 12$ |

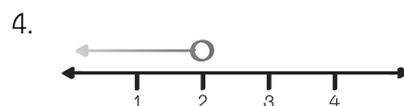
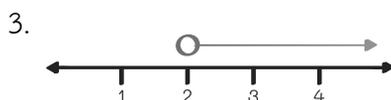
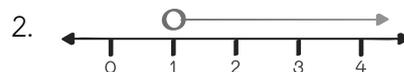
3 จงหาจำนวนเต็มมากที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการ $5 - 3(x - 2) \geq 29$

- | | |
|-------|-------|
| 1. 3 | 2. 0 |
| 3. -6 | 4. -8 |

4 จำนวนเต็มทั้งหมดที่เป็นคำตอบของอสมการ $2 < \frac{x - 3}{4} \leq 4$ มีกี่จำนวน

- | | |
|----------|----------|
| 1. 1 ตัว | 2. 2 ตัว |
| 3. 4 ตัว | 4. 8 ตัว |

5 อสมการ $2x + 7 < \frac{13x - 4}{2}$ แทนได้ตั้งเส้นจำนวนในข้อใด



เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1 ตอบ 4. ทุกจำนวนที่มากกว่า -10

แนวคิด $\frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 4}{3}$

$$3(3x - 2) > 4(2x - 4)$$

$$9x - 6 > 8x - 16$$

$$9x - 8x > -16 + 6$$

$$x > -10$$

นั่นคือ ทุกจำนวนที่มากกว่า -10

2 ตอบ 1. $x < 6$

แนวคิด $5\left(4x + \frac{2}{5}\right) < 7(x - 2) + 94$

$$20x + 2 < 7x - 14 + 94$$

$$20x - 7x < -14 + 94 - 2$$

$$13x < 78$$

$$x < 6$$

ดังนั้น $x < 6$

3 ตอบ 3. -6

แนวคิด $5 - 3(x - 2) \geq 29$

$$5 - 3x + 6 \geq 29$$

$$-3x + 11 \geq 29$$

$$-3x \geq 18$$

$$x \leq \frac{18}{-3} \text{ (ย้ายติดลบไปหารต้องกลับเครื่องหมาย)}$$

$$x \leq -6$$

ดังนั้น จำนวนเต็มที่มีมากที่สุดคือ -6

7 ตอบ 2. 560 ตร.ชม.

แนวคิด กำหนดความกว้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = $5x$

ความยาวรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = $7x$

จาก ความยาวรอบรูป = $2(ก + ย)$

สร้างสมการคือ $2(5x + 7x) \leq 108$

$$2(12x) \leq 108$$

$$24x \leq 108$$

$$x \leq 4.5$$

แต่โจทย์กำหนดความกว้างและความยาวเป็นจำนวนเต็มที่ทำให้พื้นที่มากที่สุด
จะได้ $x = 4$

พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = $ก \times ย$

$$= 5x \times 7x$$

$$= 5(4) \times 7(4)$$

$$= 560 \text{ ตร.ชม.}$$

\therefore รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุด = 560 ตร.ชม.

8 ตอบ 3. 36 ปี

แนวคิด กำหนด พ่ออายุ $พ$ ปี

ลูกชายอายุ $ล$ ปี

สร้างสมการได้ $พ - 2ล = 6$

โจทย์ถามพ่อจะต้องจัดรูปให้เหลือแต่ $พ$ ได้ $พ - 6 = 2ล$

$$\frac{พ - 6}{2} = ล$$

สร้างสมการได้ $พ + ล \leq 51$

แทนค่า $ล$ จาก ① $พ + \frac{พ - 6}{2} \leq 51$

$$\frac{2พ + พ - 6}{2} \leq 51$$

$$3พ - 6 \leq 102$$

$$3พ \leq 108$$

$$พ \leq 36$$

\therefore พ่อจะมีอายุได้มากที่สุด 36 ปี