



✓ **เตรียมสอบเข้ม**

มั่นใจเต็ม **100**

# คณิตศาสตร์

คัดเลือก

วิทยาศาสตร์โอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ

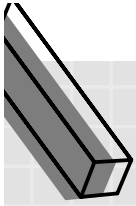
**(IJSO)**

เหมาะ  
สำหรับ  
**ม.1-2-3**

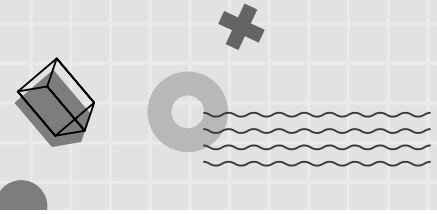
พิชิตโจทย์กับการสอบคณิตศาสตร์ที่ “ยากที่สุด” ในระดับ ม.ต้น  
ฝึกฝนกับแนวข้อสอบที่ใช้คัดเลือกตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันคณิตศาสตร์ในระดับนานาชาติ




กรกชัช แตงน้อย



# สารบัญ



การแข่งขันวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (IJSO) .....	1
ทฤษฎีบทที่ควรรู้ในการสอบ IJSO คณิตศาสตร์.....	5
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 1 .....	9
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 1 .....	13
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 2 .....	33
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 2 .....	37
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 3 .....	59
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 3 .....	63
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 4 .....	89
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 4 .....	93
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 5 .....	115
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 5 .....	120
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 6 .....	141
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 6 .....	146
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 7 .....	167
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 7 .....	172
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 8 .....	193
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 8 .....	198
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 9 .....	217
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 9 .....	222
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 10 .....	239
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 10 .....	244



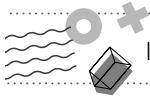
# การแข่งขันวิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (IJSO)

IJSO (International Junior Science Olympiad) หรือการแข่งขันวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (อายุไม่เกิน 15 ปี) เป็นการสอบแข่งขันในวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้ความรู้ใน 3 วิชาหลัก (ฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา) ในระดับนานาชาติ ซึ่งในแต่ละประเทศจะมีการกำหนดผู้แทนประเทศในการแข่งขันแต่ละครั้งได้ 6 คน โดยผู้ที่สนใจสมัครจะต้องมีคุณสมบัติในการสมัครดังนี้

## คุณสมบัติในการสมัครสอบคัดเลือก

1. กำลังศึกษาอยู่ในระดับ ม.1-ม.3 ณ วันที่รับสมัคร (อายุไม่เกิน 15 ปี ภายในปีนั้น ๆ)
2. มีคะแนนเฉลี่ยในกลุ่มรายวิชาพื้นฐานกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ไม่ต่ำกว่า 3.50 หรือมีผลงานทางวิทยาศาสตร์ดีเด่น (ในกรณีที่คะแนนเฉลี่ยต่ำกว่า 3.50) โดยจะต้องได้รับการรับรองจากสถานศึกษา
3. มีสัญชาติไทย
4. ต้องได้รับความยินยอมจากผู้ปกครองในการเข้าค่ายอบรม โดยจะต้องมีเวลาอบรมไม่ต่ำกว่า 80% ของแต่ละวิชา
5. สำหรับนักเรียนหลักสูตรโฮมสคูล ต้องได้รับการรับรองจากสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา
6. สำหรับนักเรียนโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา การสอบคัดเลือกรอบ 1 และรอบ 2 ให้อยู่ในการดำเนินงานของโรงเรียน เพื่อคัดเลือกผู้แทนนักเรียนจำนวนโรงเรียนละ 6 คน เข้าร่วมการอบรมในค่ายของมูลนิธิ สอวน.
7. ต้องไม่เคยเป็นผู้แทน IJSO มาก่อน

สำหรับการรับสมัคร และรายละเอียดการสมัครต่างๆ สามารถติดตามได้จากเว็บไซต์ของมูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)



หน้าแรก เกี่ยวกับมูลนิธิ ข่าวสาร กิจกรรม คลังข้อสอบ ทำเนียบรุ่น YouTube

**ข้อมร่าลึกถึงพระมหากษัตริย์คุณ**  
๒ พฤษภาคม ๒๕๖๓ วันคล้ายวันพระราชสมภพ  
สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์  
องค์ผู้ก่อตั้งมูลนิธิ สอวน.

The Promotion of Academic Olympiad and Development of Science Education Foundation under the patronage of Her Royal Highness Princess Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)  
สมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ทรงเป็นประธาน

เว็บไซต์ของมูลนิธิ สอวน. (<https://www.posn.or.th>)

### ลักษณะการสอบคัดเลือก

การสอบคัดเลือกเพื่อเป็นตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขัน IJSO นั้น มีอยู่ 3 รอบ ได้แก่

**การสอบคัดเลือกรอบที่ 1 :** สอบวิชาคณิตศาสตร์, ฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา วิชาละ 1 ชั่วโมง 30 นาที  
คัดจากผู้สมัครสอบทั่วประเทศ (รวมโควตาต่าง ๆ) จำนวน 300 คน (ไม่รวมนักเรียนจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา)

**การสอบคัดเลือกรอบที่ 2 :** สอบวิชาฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา วิชาละ 1 ชั่วโมง 30 นาที

คัดเลือกจาก 300 คน มาประมาณ 30 คน เพื่อเข้าอบรมในการเตรียมสอบรอบผู้แทนประเทศไทยต่อไป (ไม่รวมนักเรียนจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา)

### การสอบรอบผู้แทนประเทศไทย

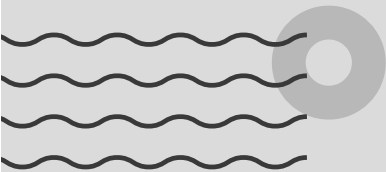
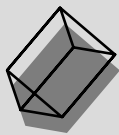
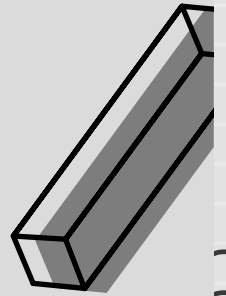
ต้องผ่านการอบรมในแต่ละวิชาเกิน 80% โดยจะมีการคัดเลือกเป็นผู้แทนจริง 6 คน และสำรองอีก 4 คน



## เนื้อหาที่ใช้ในการสอบรอบที่ 1 IJSO (คณิตศาสตร์)

เนื้อหาในการสอบคัดเลือกรอบที่ 1 IJSO (คณิตศาสตร์) จะแบ่งเป็น 5 ส่วนใหญ่ๆ ได้ดังนี้

1. กลุ่มจำนวน และตัวเลข ได้แก่
  - จำนวนเต็ม และสมบัติของจำนวนเต็ม
  - เศษส่วน และทศนิยม
  - อัตราส่วน, สัดส่วน และร้อยละ
  - เลขยกกำลัง (เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ)
2. กลุ่มพีชคณิต
  - สมการ และอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
  - การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
  - คู่อันดับและกราฟ
  - ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
  - สมการกำลังสอง
  - กราฟของสมการกำลังสอง
3. กลุ่มเรขาคณิต
  - รูปเรขาคณิต และการให้เหตุผล
  - ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม, เส้นขนาน และความคล้าย
  - รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม
  - ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ
  - วงกลม
4. กลุ่มการวัด
  - พื้นที่
  - ปริมาตรของปริซึม, ทรงกระบอก, พีระมิด, กรวย และทรงกลม
  - พื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก
5. กลุ่มตรีโกณมิติ
  - รูปสามเหลี่ยมคล้าย และอัตราส่วนตรีโกณมิติ
  - เอกลักษณะตรีโกณมิติ
  - การประยุกต์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

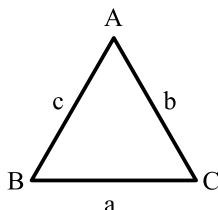


# ทฤษฎีบทที่ควรรู้ ในการสอบ IJSO คณิตศาสตร์

เนื่องจากข้อสอบคัดเลือก IJSO คณิตศาสตร์มีลักษณะที่ค่อนข้างซับซ้อนมาก ทำให้การสอบภายในช่วงเวลา 1 ชั่วโมงครึ่ง อาจไม่เพียงพอต่อการทำโจทย์ได้ทั้งหมด ดังนั้น นักเรียนที่กำลังเตรียมตัวสอบ IJSO จึงควรรู้ทฤษฎีบทที่มักช่วยลัดขั้นตอนในการทำโจทย์ และจะถูกใช้ในหนังสือเล่มนี้ด้วย ได้แก่

## 1. การหาพื้นที่สามเหลี่ยมแบบใช้ตรีโกณมิติมาช่วยหา “ความสูง”

จากรูปพื้นที่สามเหลี่ยม ABC จะหาได้จาก



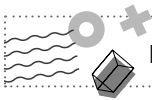
$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณด้านประกอบมุม } \theta \times \sin \theta$$

$$\text{นั่นคือ พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times (a \times b) \times \sin C = \frac{1}{2} \times (a \times c) \times \sin B = \frac{1}{2} \times (b \times c) \times \sin A$$

## 2. การคิดค่า sin ของมุมที่เกิน 90°

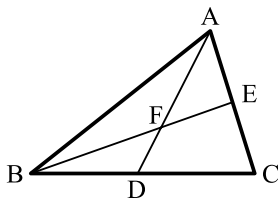
ในบางกรณี การหาพื้นที่สามเหลี่ยมของโจทย์ก็มีความจำเป็นที่ต้องใช้มุมมากกว่า 90 องศา ซึ่งโดยคุณสมบัติของตรีโกณมิติแล้ว จะพบว่าหากมุม  $\theta > 90^\circ$  แล้ว

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$



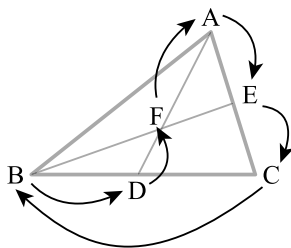
### 3. ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem)

สำหรับสามเหลี่ยมที่มีเส้นตรงตัดกันภายในแล้ว จะได้ว่า



ผลคูณของอัตราส่วนความยาวบนเส้นตรงเดียวกัน = 1

โดยมีเทคนิคการเรียงอัตราส่วนความยาวคือ “เริ่มจากจุดใด ให้จบที่จุดนั้น” เช่น เริ่มที่จุด A ก็ต้องจบที่จุด A และ \*ในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้เคลื่อนที่สองครั้งเพื่อเกิดอัตราส่วน\* เช่นดังรูป

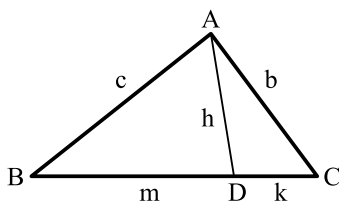


และจากรูปก็สามารถเขียนเป็นสมการตามทฤษฎีบทเซวาได้ว่า

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

### 4. ทฤษฎีบทของสจิวต์ (Stewart's Theorem)

สำหรับสามเหลี่ยมที่มีเส้นตรงหนึ่งเส้นอยู่ภายในสามเหลี่ยม



จากรูป สามเหลี่ยม ABC มีเส้นตรง AD ลากอยู่ภายใน ทำให้ด้าน BC ถูกแบ่งออกเป็น m, k แล้ว

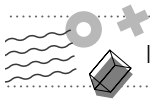
$$b^2m + c^2k = (m+k)(mk + h^2)$$





# แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์)

ชุดที่ 1



1. จงหาค่าของ  $\frac{8}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
1.  $\sqrt{2}+\sqrt{6}+2$       2.  $\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$       3.  $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4$       4.  $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-4$
2. จงหาค่าของ  $\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+2^{-\frac{1}{4}}+2^{-\frac{2}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}}$
1. 1      2. 2      3. 3      4. 4
3. จงหาค่าของ  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$
1.  $-\sqrt{2}$       2.  $\sqrt{2}$       3.  $-\sqrt{7}$       4.  $\sqrt{7}$
4. จงหาค่าของ  $2 + \left(5^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{2}} + 2\right)^{-\frac{1}{2}}$
1.  $\sqrt{2}$       2. 2      3.  $\sqrt{5}$       4. 5
5. ให้  $A = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^3$  และ  $B = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^3$  ถ้า  $A + B = 6$  แล้ว  $A - B$  มีค่าเท่าไร
1.  $2\sqrt{3}$       2.  $3\sqrt{2}$       3.  $4\sqrt{2}$       4.  $2\sqrt{10}$
6. ถ้า  $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$  และ  $B = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$  แล้ว  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199}$  มีค่าเท่าไร
1.  $A - \frac{B}{2}$       2.  $A + \frac{B}{2}$       3.  $\frac{A}{2} - B$       4.  $\frac{A}{2} + B$
7. จงหาค่าต่ำสุดของ  $(x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 20$
1. 10      2. 15      3. 20      4. 25
8. จีโน่พายเรือตามน้ำจากบ้านไปโรงเรียนแล้วจึงพายทวนน้ำกลับบ้าน ถ้าอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง และอัตราเร็วของกระแสน้ำมีค่าคงตัว และอัตราเร็วเฉลี่ยของการพายเรือไปกลับนี้เป็น 0.6 เท่าของอัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ แล้วอัตราส่วนของอัตราเร็วการพายเรือในน้ำนิ่งต่ออัตราเร็วกระแสน้ำมีค่าเท่าไร
1.  $\frac{1}{5}$       2.  $\frac{2}{5}$       3.  $\frac{5}{2}$       4. 5
9. A, B และ C แข่งวิ่งระยะ 100 เมตร ถ้า A เริ่มที่จุดตั้งต้น B อยู่ข้างหน้า A 20 เมตร และ C อยู่ข้างหน้า B 20 เมตร แล้วทั้งสามคนถึงเส้นชัยพร้อมกันหมด ถ้าให้ B เริ่มที่จุดตั้งต้น และต้องการให้ B และ C ถึงเส้นชัยพร้อมกัน C ต้องเริ่มข้างหน้า B กี่เมตร ถ้าสมมติให้ทุกคนวิ่งด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ
1. 10      2. 15      3. 20      4. 25



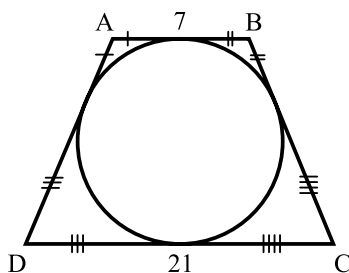
10. รถยนต์ยาว 5 เมตร วิ่งด้วยความเร็ว 65 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สวนกับรถบรรทุกที่วิ่งมาด้วยความเร็ว 35 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้ารถทั้งสองคันใช้เวลา 0.54 วินาที จึงวิ่งผ่านกันโดยสมบูรณ์ จงหาว่ารถบรรทุกยาวกี่เมตร

1. 10                                  2. 12                                  3. 15                                  4. 18

11. ส่วนของเส้นตรง AB ตัดส่วนของเส้นตรง CD ที่จุด M ซึ่ง  $3AM = 4MB$  และ  $3CM = MD$  ถ้า AB ยาว 28 หน่วย และมุม  $\hat{A}BD = \hat{A}CD$  แล้ว CM ยาวกี่หน่วย

1. 4    2. 6    3. 8    4. 10

12. วงกลมรัศมี 6 หน่วย สัมผัสด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้านขนานกันยาว 7 หน่วย และ 21 หน่วย แล้วกำลังสองของผลต่างของความยาวอีกสองด้านที่เหลือของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่าเท่าไร



1. 1    2. 4    3. 9    4. 16

13. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ยาวด้านละ 2 หน่วย มีเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุดยาวกี่หน่วย

1.  $\sqrt{2}$                                       2.  $\sqrt{3}$                                       3.  $2\sqrt{2}$                                       4.  $2\sqrt{3}$

14. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุด P อยู่บนด้าน AB ทำให้  $AP = 3PB$  ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ผ่านจุดกึ่งกลางของ DP ไปตัด AD ที่จุด Q แล้ว  $\frac{AQ}{DQ}$  มีค่าเท่าไร

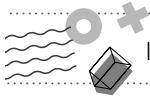
1.  $\frac{1}{4}$     2.  $\frac{1}{3}$     3.  $\frac{1}{2}$     4. 1

15. สามเหลี่ยม ABC มีมุม  $B = C$  กำหนดจุด D บน AB ที่  $AD : DB = 2 : 3$  ลากเส้นตรงจากจุด D มาตั้งฉากกับ BC ที่จุด E ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย แล้วสามเหลี่ยม AEO มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

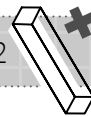
1. 2    2. 3    3. 5    4. 7

16. สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ 32 ตารางหน่วย ถ้าจุด M และ N อยู่บนด้าน AB และ AC ทำให้สามเหลี่ยม AMC และสามเหลี่ยม BNC มีพื้นที่ 8 ตารางหน่วยทั้งคู่ แล้วสามเหลี่ยม AMN มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

1. 3    2. 6    3. 9    4. 12



17. เหน้ 72 ลูกบาศก์หน่วย ใส่แก้วทรงกรวยความจุ 243 ลูกบาศก์หน่วย ที่มีจุดยอดกรวยเป็นกันแ้ว ถ้าระดับน้ำสูงจากกันแ้ว 6 หน่วย แล้วแก้วโบนีสูงเท่าไร
1. 9                      2. 10                      3. 11                      4. 12
18. กำหนดให้กรวยมีปริมาตร  $1344\pi$  ลูกบาศก์หน่วย โดยมีความสูง 7 หน่วย ถ้าตัดกรวยตามแนวสูงเอียง แล้วค้ล้อก จะได้รูปวงกลมที่ไม่เต็มวง จงหาว่าส่วนที่หายไปมีขนาดก้องศาที่จุดศูนย์กลาง
1. 7.2                      2. 14.4                      3. 21.6                      4. 28.8
19. ทรงกลมรัศมี 1 หน่วย บรรจุอยู่ภายในพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 4 หน่วย ได้พอดี จงหาความสูงของพีระมิดนี้
1.  $\frac{8}{3}$                       2. 3                      3. 4                      4.  $\frac{16}{3}$
20. พีระมิดรูปหนึ่งมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ 2 หน่วย ถ้าพีระมิดหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วพีระมิดนี้มีส่วนสูงกี่หน่วย
1.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       2.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$                       3.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       4.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
21. ถ้า  $0^\circ < A < 90^\circ$  และ  $\operatorname{cosec} A - \sec A = \sqrt{3}$  แล้ว  $\cos A - \sin A$  มีค่าเท่าไร
1.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       2.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$                       3.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$                       4.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$
22. ถ้า  $0^\circ < A < 90^\circ$  และ  $\sec^4 A - \tan^4 A = 3$  แล้ว  $\operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A$  มีค่าเท่าไร
1. 1                      2. 2                      3. 3                      4. 4
23. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่งมี  $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$  ถ้า  $AC = 3BC$  แล้ว  $\frac{AB}{BC}$  มีค่าเท่าไร
1. 1                      2.  $\sqrt{5}$                       3. 3                      4.  $\sqrt{10}$
24. ข้อใดมีค่ามากที่สุด
1.  $\sqrt{\cos 62^\circ}$                       2.  $\sqrt{\cos 58^\circ}$                       3.  $\cos 62^\circ$                       4.  $\cos 58^\circ$
25. ชาร์ลียืนอยู่ทางทิศใต้ของอาคารแห่งหนึ่งมองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30 องศา และทีชียืนอยู่ทางทิศตะวันออกของอาคารแห่งนี้มองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าทั้งสองคนยืนห่างกัน 200 เมตร แล้วอาคารนี้สูงกี่เมตร (ไม่คำนึงถึงความสูงของทั้งสองคน)
1.  $\sqrt{30}$                       2.  $10\sqrt{30}$                       3.  $20\sqrt{30}$                       4.  $30\sqrt{30}$



## เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 2

1. 2	2. 4	3. 4	4. 1	5. 3
6. 2	7. 4	8. 3	9. 2	10. 1
11. 3	12. 2	13. 2	14. 2	15. 1
16. 4	17. 4	18. 1	19. 3	20. 1
21. 1	22. 4	23. 1	24. 4	25. 3

### เฉลยอย่างละเอียด

1. กำหนด  $a = 2^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = 3^{\frac{1}{3}}$  และ  $c = 6^{\frac{1}{6}}$  แล้วจงเรียงค่าจากน้อยไปมาก

1.  $a < b < c$       2.  $b < a < c$       3.  $a < c < b$       4.  $c < a < b$

**วิธีทำ** เนื่องจากเลขชี้กำลังติดลบ ควรทำให้เลขชี้กำลังเป็นบวกก่อน

จะได้ว่า  $a = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ ,  $b = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$  และ  $c = \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}}$

แล้วทุกตัวยกกำลังด้วย 6 เพื่อให้เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ง่ายต่อการคำนวณ (6 มาจาก ค.ร.น. ของ 2, 3, 6) และจากยกกำลังเหมือนกันทุกตัว ค่าจะเรียงจากน้อยไปมากเหมือนเดิม

ดังนั้น  $a = \frac{1}{2^3}$ ,  $b = \frac{1}{3^2}$  และ  $c = \frac{1}{6}$

$$a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{9} \text{ และ } c = \frac{1}{6}$$

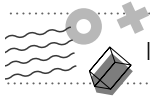
สรุปได้ว่า ค่าจะเรียงจากน้อยไปมาก คือ  $b < a < c$

2. จงหาค่าของ  $30(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})(1+2^{32})(1+2^{64})(1+2^{128})$

1.  $2^{257} + 4$       2.  $2^{257} - 4$       3.  $2^{257} + 2$       4.  $2^{257} - 2$

**วิธีทำ** จัดให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$



$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } (2)(2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^{32} - 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^{64} - 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^{128} - 1)(2^{128} + 1) \\
&= (2)(2^{256} - 1) = 2^{257} - 2
\end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ  $\sqrt{2011 \cdot 2014 \cdot 2017 \cdot 2020 + 81} - 2014^2$

1. 6006

2. 6013

3. 6026

4. 6033

**วิธีทำ** กำหนดให้  $k = 2014$  จะได้ว่า

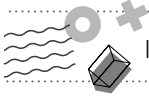
$$\begin{aligned}
\sqrt{2011 \cdot 2014 \cdot 2017 \cdot 2020 + 81} - 2014^2 &= \sqrt{(k-3)(k)(k+3)(k+6) + 81} - k^2 \\
&= \sqrt{(k^2 + 3k - 18)(k^2 + 3k) + 81} - k^2
\end{aligned}$$

กำหนดให้  $m = k^2 + 3k$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sqrt{(k^2 + 3k - 18)(k^2 + 3k) + 81} - k^2 &= \sqrt{(m-18)(m) + 81} - k^2 \\
&= \sqrt{m^2 - 18m + 81} - k^2 \\
&= \sqrt{(m-9)^2} - k^2 \\
&= m - 9 - k^2 \\
&= k^2 + 3k - 9 - k^2 = 3k - 9
\end{aligned}$$

แทนค่า  $k = 2014$  กลับไป จะได้

$$\sqrt{2011 \cdot 2014 \cdot 2017 \cdot 2020 + 81} - 2014^2 = 3(2014) - 9 = 6042 - 9 = 6033$$



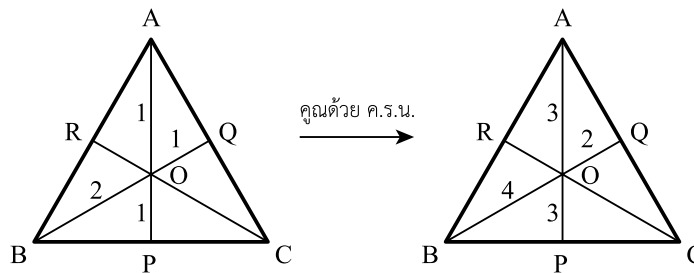
13. กำหนดรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  และ  $P, Q, R$  เป็นจุดบนด้าน  $BC, CA$  และ  $AB$  ตามลำดับ และส่วนของเส้นตรง  $AP, BQ$  และ  $CR$  บรรจบกันที่จุด  $O$  ถ้า  $\frac{AO}{OP} = 1$  และ  $\frac{BO}{OQ} = 2$  แล้ว  $\frac{OR}{CO}$  มีค่าเท่าไร

1.  $\frac{1}{5}$                       2.  $\frac{1}{3}$                       3. 3                      4. 5

**วิธีทำ** จากโจทย์ตามเป็นอัตราส่วน ดังนั้น เราสามารถกำหนดเลขขึ้นมาเองได้ และไม่เสียนัยของการหาคำตอบ และเพื่อความสะดวก เราจะใช้วิธี mass point เป็นวิธีการหนึ่งในการหาความยาวของเส้นตัดภายในสามเหลี่ยม ซึ่งมีหลักการที่ว่า

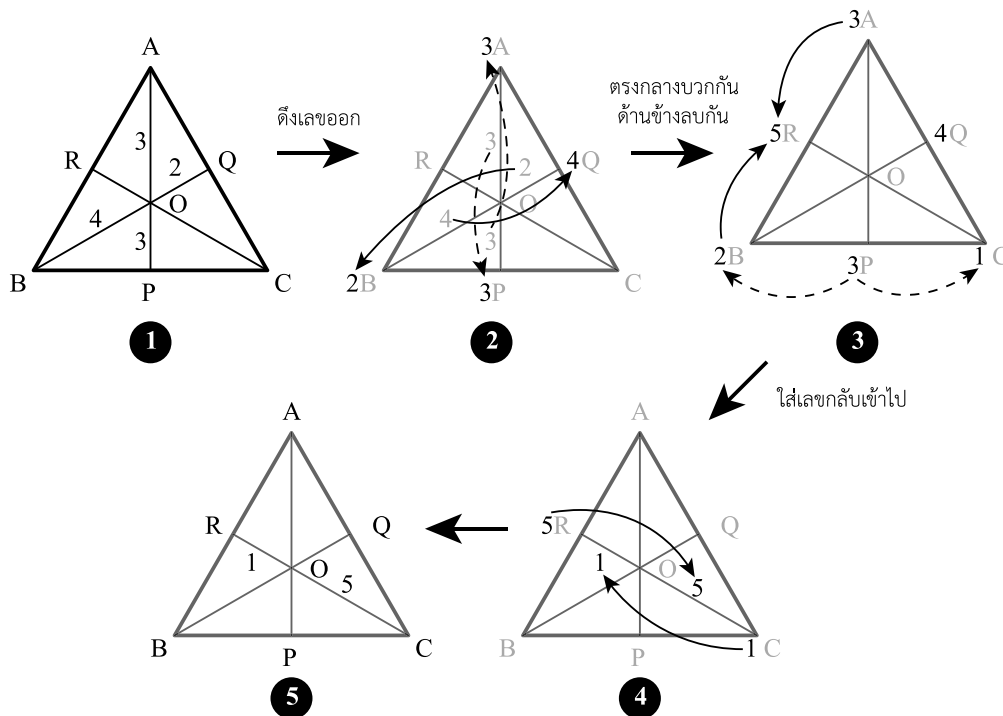
**“เส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง (จุด  $O$ ) จะมีผลรวมของเลขที่เท่ากัน”**

เนื่องจากเส้น  $AP$  ผลรวมได้ 2 และเส้น  $BQ$  ผลรวมได้ 3 ดังนั้น จากภาพแรกเราใช้วิธี ค.ร.น. ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6 โดยเส้นของ  $AP$  จะต้องคูณอีก 3 และเส้น  $BQ$  จะต้องคูณอีก 2 จะได้ดังภาพ



เมื่อหา ค.ร.น. แล้ว เราจะหาความยาวของ  $OR$  และ  $CO$  ได้ดังนี้

- นำเลขของแต่ละด้านภายในรูปสามเหลี่ยมออกดังรูปที่ 2
- จุดที่อยู่ระหว่างด้าน (จุด  $P, Q, R$ ) จะเป็นจุดที่เป็น “ผลรวม” ของเลขของจุดที่อยู่ปลายด้าน (จุด  $A, B, C$ ) ตามรูปที่ 3
- เมื่อได้ค่าที่จุดต่างๆ แล้วเราจะนำค่าใส่กลับไปที่ 4
- เราจะได้ขนาดของด้าน  $OR$  และ  $CO$  ตามรูปที่ 5

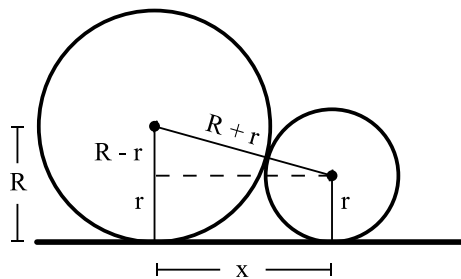


จะได้ว่า  $\frac{OR}{CO} = \frac{1}{5}$

14. จุด A และ จุด B อยู่บนพื้นราบ และอยู่ห่างกัน 2 หน่วย วงทรงกลมรัศมี a หน่วยที่จุด A และ ทรงกลมรัศมี b หน่วยที่จุด B ถ้าทรงกลมทั้งสองสัมผัสกันพอดี แล้วข้อใดเป็นจริงเสมอ

1.  $ab = 1$       2.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$       3.  $a + b = 1$       4.  $|a - b| = 1$

วิธีทำ การหาระยะห่างของวงกลมทั้งสองวงในระนาบ สามารถทำได้ดังนี้



จากรูปจะได้ว่า

$$x^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$$

$$x^2 = (R^2 + 2Rr + r^2) - (R^2 - 2Rr + r^2)$$

$$x^2 = 4Rr$$

$$x = 2\sqrt{Rr}$$