

inspire

คณิตศาสตร์

ม.ปลาย

มั่นใจเต็ม

100



เหมาะสำหรับนักเรียน **ม.4-5-6**

เพื่อเตรียมสอบกับสนามสอบ

O-NET แอดมิชชัน **PAT 1** โควตา ington

สมาคมฯ หรือเพื่อเพิ่มเกรดในชั้นเรียน

เนื้อหาครบจัดเต็มทั้งคณิตฯ พื้นฐานและเพิ่มเติม โดยครอบคลุมหลักสูตรแกนกลางฯ 2551

การสรุปเนื้อหาที่เข้าใจง่าย

การเฉลยโดยอธิบายจากภาพประกอบ เพื่อสร้างความเข้าใจให้แข็งแกร่ง

จัดเต็มทุกกระบวนการ

- ตัวอย่าง
- วิธีลัด
- แบบฝึกหัด
- แนวข้อสอบจากสนามสอบต่างๆ

อย่าให้คณิตศาสตร์เพิ่มความเครียด

อ่านง่าย เข้าใจเร็ว เพื่อคะแนนที่สูงกว่าในทุสนามสอบ

ศินาพร แสงใส

ศศิธร แสงใส

ทองพูน โพธิสาร

สารบัญ

Chapter 1	เซต	1
	1.1 เซต	1
	1.1.1 วิธีการเขียนเซต	1
	1.1.2 ประเภทของเซต	2
	1.2 สับเซต	2
	1.3 เพาเวอร์เซต	3
	1.4 การดำเนินการบนเซต	4
	1.4.1 ลักษณะต่างๆ ของแผนภาพเวนน-ออยเลอร์	4
	ข้อสอบท้ายบทที่ 1 เซต	7
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 1 เซต	10
Chapter 2	การให้เหตุผล	19
	2.1 ระบบคณิตศาสตร์	19
	2.2 การให้เหตุผล	20
	2.3 การตรวจสอบความสมเหตุสมผล	21
	ข้อสอบท้ายบทที่ 2 การให้เหตุผล	22
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 2 การให้เหตุผล	28
Chapter 3	ตรรกศาสตร์	37
	3.1 ประพจน์	37
	3.2 ตัวเชื่อมประพจน์	38
	3.3 ประพจน์ที่สมมูลกัน	40
	3.4 สัจนิรันดร์	42
	3.5 การอ้างเหตุผล	43
	3.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ	45
	3.6.1 ประโยคเปิด	45
	3.6.2 ตัวบ่งปริมาณ	45
	ข้อสอบท้ายบทที่ 3 ตรรกศาสตร์	48
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 3 ตรรกศาสตร์	52
Chapter 4	จำนวนจริง	61
	4.1 โครงสร้างของจำนวนจริง	61
	4.2 สมบัติของจำนวนจริง	62
	4.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบ	65
	4.3.1 ทฤษฎีบทเศษเหลือ	65

	4.3.2 ทฤษฎีบทตัวประกอบ	66
	4.3.3 ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ	67
	4.4 การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว	68
	4.5 ช่วงและการแก้สมการ	68
	4.5.1 ช่วง	68
	4.5.2 การแก้สมการ	69
	4.6 ค่าสัมบูรณ์	71
	4.7 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	74
	4.7.1 การหารลงตัว	74
	4.7.2 ตัวหารร่วมมาก	75
	4.7.3 ตัวคูณร่วมน้อย	75
	ข้อสอบท้ายบทที่ 4 จำนวนจริง	76
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 4 จำนวนจริง	78
Chapter 5	ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	87
	5.1 คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน	87
	5.2 ความสัมพันธ์	88
	5.2.1 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	88
	5.2.2 อินเวอร์สของความสัมพันธ์	90
	5.3 ฟังก์ชัน	90
	5.3.1 ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง	91
	5.3.2 ฟังก์ชันที่ควรรู้จัก	92
	ข้อสอบท้ายบทที่ 5 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	96
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 5 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	99
Chapter 6	เลขยกกำลัง	107
	6.1 เลขยกกำลัง	107
	6.2 รากที่ n ของจำนวนจริง	109
	ข้อสอบท้ายบทที่ 6 เลขยกกำลัง	112
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 6 เลขยกกำลัง	114
Chapter 7	เรขาคณิตวิเคราะห์	121
	7.1 ระบบพิกัดฉาก	121
	7.2 การหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม	124
	7.3 ความชันของเส้นตรง	125
	7.4 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	126
	7.5 สมการเส้นตรง	126
	7.6 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด	128
	7.7 โปไรเจกชัน	129

ข้อสอบท้ายบทที่ 7 เรขาคณิตวิเคราะห์	132
เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 7 เรขาคณิตวิเคราะห์	135

Chapter 8 ภาคตัดกรวย 145

8.1 วงกลม	145
8.2 พาราโบลา	147
8.3 วงรี	151
8.4 ไฮเพอร์โบลา	154
ข้อสอบท้ายบทที่ 8 ภาคตัดกรวย	157
เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 8 ภาคตัดกรวย	160

Chapter 9 เมตริกซ์ 171

9.1 มิติของเมตริกซ์	172
9.2 ชนิดของเมตริกซ์	173
9.3 การเท่ากันของเมตริกซ์	174
9.4 การดำเนินการบนเมตริกซ์	175
9.4.1 การบวกเมตริกซ์	175
9.4.2 การลบเมตริกซ์	175
9.4.3 การคูณเมตริกซ์	176
9.5 เมตริกซ์เอกลักษณะและเมตริกซ์สลับเปลี่ยน	179
9.6 เอกฐานของเมตริกซ์	180
9.7 ดีเทอร์มิแนนต์	180
9.8 ไมเนอร์	181
9.9 โคแฟกเตอร์	182
9.10 เมตริกซ์ผกผัน	183
9.11 การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้โคแฟกเตอร์	184
9.12 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น	187
ข้อสอบท้ายบทที่ 9 เมตริกซ์	190
เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 9 เมตริกซ์	194

Chapter 10 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม 205

10.1 เลขยกกำลัง	205
10.2 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล	209
10.2.1 สมการเอ็กซ์โพเนนเชียล	210
10.2.2 อสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล	210
10.3 ฟังก์ชันลอการิทึม	211
10.3.1 สมการลอการิทึม	214
10.3.2 อสมการลอการิทึม	215
ข้อสอบท้ายบทที่ 10 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	215
เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 10 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	217

Chapter 11	ตรีโกณมิติ	227
	11.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	227
	11.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	230
	11.2.1 มุมและการวัด	230
	11.2.2 วงกลมหนึ่งหน่วย	230
	11.2.3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	231
	11.2.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	231
	11.2.5 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	233
	11.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์	236
	11.3.1 สมการตรีโกณมิติ	241
	11.3.2 กฎของโคไซน์และกฎของไซน์	242
	ข้อสอบท้ายบทที่ 11 ตรีโกณมิติ	244
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 11 ตรีโกณมิติ	246
Chapter 12	เวกเตอร์	255
	ความหมายของเวกเตอร์	255
	12.1 ลักษณะของเวกเตอร์	255
	12.2 นิเสธของเวกเตอร์	256
	12.3 การบวกเวกเตอร์	256
	12.4 การลบเวกเตอร์	257
	12.5 สมบัติของเวกเตอร์	258
	12.6 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก	261
	12.7 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ \vec{u}	266
	12.8 ผลคูณสเกลาร์	268
	12.9 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	270
	ข้อสอบท้ายบทที่ 12 เวกเตอร์	272
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 12 เวกเตอร์	275
Chapter 13	ลำดับและอนุกรม	287
	13.1 ลำดับ	287
	13.2 ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต	288
	13.2.1 ลำดับเลขคณิต	288
	13.2.2 ลำดับเรขาคณิต	289
	13.2.3 ลำดับอื่นๆ ที่น่าสนใจ	290
	13.3 ลิมิตของลำดับ	290
	13.4 อนุกรม	293
	13.5 อนุกรมเลขคณิต เรขาคณิต และอื่นๆ	294
	13.5.1 อนุกรมเลขคณิต	294
	13.5.2 อนุกรมเรขาคณิต	294

	13.5.3 อนุกรมอื่นๆ	294
	13.6 อนุกรมอนันต์	294
	13.6.1 อนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเลขคณิต	295
	13.6.2 อนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต	295
	ข้อสอบท้ายบทที่ 13 ลำดับและอนุกรม	296
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 13 ลำดับและอนุกรม	298
Chapter 14	จำนวนเชิงซ้อน	305
	14.1 จำนวนจินตภาพ	305
	14.2 จำนวนเชิงซ้อน	306
	14.3 การบวกจำนวนเชิงซ้อน	306
	14.4 การคูณจำนวนเชิงซ้อน	307
	14.5 การลบจำนวนเชิงซ้อน	308
	14.6 การหารจำนวนเชิงซ้อน	308
	14.7 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	308
	14.8 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	309
	14.9 กราฟของจำนวนเชิงซ้อน การเขียนเวกเตอร์ แทนจำนวนเชิงซ้อนและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	310
	14.10 การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	311
	14.11 สมการพหุนาม	312
	ข้อสอบท้ายบทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน	313
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน	316
Chapter 15	การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	325
	15.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับ	325
	15.2 แฟกทอเรียล	326
	15.3 การเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น	326
	15.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม	328
	15.5 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	329
	15.6 ทฤษฎีทวินาม	330
	15.7 การหาพจน์ทั่วไปจากการกระจาย $(a + b)^n$	331
	15.8 การหาพจน์กลางจากการกระจาย $(a + b)^n$	331
	15.9 การหาผลบวกของสัมประสิทธิ์จากการกระจาย $(ax + by)^n$	332
	15.10 การนำทฤษฎีบททวินามไปประยุกต์ใช้	332
	ข้อสอบท้ายบทที่ 15 การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	333
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 15 การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	337
Chapter 16	ความน่าจะเป็น	347
	16.1 แซมเปิลสเปซ	347
	16.2 เหตุการณ์	348

	16.3 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	348
	ข้อสอบท้ายบทที่ 16 ความน่าจะเป็น	352
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 16 ความน่าจะเป็น	356
Chapter 17	สถิติ	367
	17.1 สถิติภาคคำนวณ	367
	17.2 ควอร์ไทล์, เดไซล์, เปอร์เซ็นไทล์	372
	17.3 การวัดการกระจาย	376
	17.4 ความแปรปรวน	379
	17.5 การวัดการกระจายสัมพัทธ์	381
	17.6 ค่ามาตรฐาน หรือ Z-scores	385
	17.7 การแจกแจงปกติ	388
	ข้อสอบท้ายบทที่ 17 สถิติ	390
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 17 สถิติ	398
Chapter 18	ทฤษฎีกราฟ	415
	18.1 กราฟ	415
	18.2 เส้นเชื่อมขนาน-วงวน	416
	18.3 จุดยอดประชิดและเส้นเชื่อม	416
	18.4 ดีกรีของจุดยอด	416
	18.5 แนวเดิน	417
	18.6 กราฟเชื่อมโยง	418
	18.7 กราฟฮอยเลอร์	419
	18.8 การประยุกต์ของกราฟ	419
	ข้อสอบท้ายบทที่ 18 ทฤษฎีกราฟ	423
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 18 ทฤษฎีกราฟ	429
Chapter 19	กำหนดการเชิงเส้น	435
	19.1 กราฟของอสมการเชิงเส้นที่ควรทราบ	435
	19.2 กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร	437
	19.3 การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของระบบอสมการเชิงเส้น	438
	ข้อสอบท้ายบทที่ 19 กำหนดการเชิงเส้น	441
	เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 19 กำหนดการเชิงเส้น	446
Chapter 20	แคลคูลัส	459
	20.1 ทฤษฎีลิมิต	459
	20.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง	463
	20.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	464
	20.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	465
	20.5 การหาอนุพันธ์อันดับสูง	466

20.6 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย	467
20.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิตหรือฟังก์ชันประกอบ	468
20.8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน	468
20.9 ความชันและเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง	470
20.10 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	471
20.11 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	472
20.12 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	474
20.13 โจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุด/ต่ำสุด	475
20.14 ความสัมพันธ์ระหว่างสมการการเคลื่อนที่ ความเร็ว และความเร่ง	476
20.15 ฏิกยานุพันธ์	477
20.16 อินทิกรัลไม่จำกัด	478
20.17 โจทย์เกี่ยวกับการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้	480
20.18 อินทิกรัลจำกัดเขต	482
ข้อสอบท้ายบทที่ 20 แคลคูลัส	483
เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 20 แคลคูลัส	487

บทที่

1

เซต

1.1 เซต

เซต เป็นคำนิยามที่ใช้บ่งบอกถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ ที่เราสามารถกำหนดสมาชิกได้ชัดเจน

สัญลักษณ์แทนเซตจำนวนต่างๆ

I	เซตของจำนวนเต็ม	I^+	เซตของจำนวนเต็มบวก
I^-	เซตของจำนวนเต็มลบ	P	เซตของจำนวนเฉพาะ
R	เซตของจำนวนจริง	Q	เซตของจำนวนตรรกยะ
N	เซตของจำนวนนับ		

1.1.1 วิธีการเขียนเซต

สามารถเขียนได้ 2 แบบคือ

1. **การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก** เป็นการเขียนที่แสดงให้เห็นสมาชิกทุกตัวในเซตนั้นๆ ลงในวงเล็บปีกกา { } และคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) เช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$

2. **การเขียนแบบบอกเงื่อนไข** เป็นการเขียนแทนสมาชิกของเซตด้วยตัวแปร แล้วกำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรนั้น เพื่อแสดงว่ามีสิ่งใดบ้างที่เป็นสมาชิกของเซต

ใช้สัญลักษณ์	แทนคำว่า	โดยที่
\in	แทนคำว่า	เป็นสมาชิกของ
\notin	แทนคำว่า	ไม่เป็นสมาชิกของ

เช่น

เงื่อนไข	แจกแจง
$A = \{x x \in I\}$	$A = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$
$B = \{x \in I^+ 1 \leq x \leq 5\}$	$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.1.2 ประเภทของเซต

- **เซตว่าง**คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกหรือมีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ สัญลักษณ์ที่ใช้ในเซตว่างคือ $\{ \}$ หรือ \emptyset อ่านว่า ฟาย (phi)
- **เซตจำกัด**คือ เซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดคือ สามารถบอกได้แน่นอนว่ามีสมาชิกกี่ตัว เช่น $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 10
- **เซตอนันต์**คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน และเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น $B = \{1, 2, 3, \dots\}$
- **เซตที่เท่ากัน**คือ เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว เช่น $C = \{4, 5, 6\}, D = \{6, 5, 4\}$ จะเห็นว่าสมาชิกของเซต C และ D เหมือนกันทุกตัว ดังนั้น $C = D$
- **เซตที่เทียบเท่ากัน**คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน เช่น $E = \{1, 3, 5\}, F = \{2, 4, 6\}$ จะเห็นว่าสมาชิกของเซต E และ F จะเทียบเท่ากัน ดังนั้น $E \sim F$

ข้อสังเกต

1. เซตว่างเป็นเซตจำกัด
2. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกเขียนสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เช่น เซตของเลขโดดที่อยู่ในจำนวน 133 คือ $\{1, 3\}$

1.2 สับเซต

ให้ A และ B แทนเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

1. เซต A เป็น**สับเซต**ของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ถ้ามีสมาชิกของ A อย่างน้อย 1 ตัวไม่เป็นสมาชิกของ B กล่าวได้ว่า **ไม่เป็นสับเซต**ของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$
2. เซต A เป็น**สับเซตแท้**ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 1

พิจารณหาข้อสรุป โดยให้ X, Y และ Z เป็นเซตดังนี้

$$X = \{5, 7, 9, 11, 13, 17\} \quad Y = \{7, 13, 17\} \quad Z = \{5, 11, 7, 9, 17, 13\}$$

- เซต Y เป็น**สับเซตแท้**ของเซต X เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ Y เป็นสมาชิกของ X และ $Y \neq X$ เขียนแทนด้วย $Y \subset X$
- เซต Y เป็น**สับเซตแท้**ของเซต Z เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ Y เป็นสมาชิกของ Z และ $Y \neq Z$ เขียนแทนด้วย $Y \subset Z$
- เซต X เป็น**สับเซต**ของเซต Z เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ X เป็นสมาชิกของ Z เขียนแทนด้วย $X \subset Z$
- เซต Z เป็น**สับเซต**ของเซต X เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ Z เป็นสมาชิกของ X เขียนแทนด้วย $Z \subset X$

สมบัติเกี่ยวกับสับเซต

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ จะสรุปได้ว่า

1. $A \subset A$
2. $\emptyset \subset A$
3. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
4. $A \subset B$ และ $B \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

จำนวนสับเซต

กำหนดให้ A เป็นเซตใดๆ ที่มีสมาชิก n ตัว จะสรุปได้ว่า

1. จำนวนสับเซตทั้งหมดของ $A = 2^n$
2. จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของ $A = 2^n - 1$
3. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว $= 2^n - 1$
4. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว $= 2^n - n - 1$
5. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกเพียง 2 ตัว $= \frac{n(n-1)}{2}$
6. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกเพียง r ตัว $= C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

1.3 เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของเซต A คือเซตของสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย $P(A)$ หรือ $P(A) = \{x | x \subset A\}$ เช่น $A = \{1, 3, 5\}$ จะได้ $P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \emptyset\}$

สมบัติเกี่ยวกับเพาเวอร์เซต

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ สรุปได้ว่า

1. $P(A) \neq \emptyset$ (สำหรับทุกๆ เซต A)
2. $\emptyset \in P(A)$ และ $\emptyset \subset P(A)$
3. $A \in P(A)$
4. จำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^n$ (เมื่อ A เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว)
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
7. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
8. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว $P(A)$ เป็นเซตอนันต์

ข้อสังเกต

1. $A \subset (A \cup B)$ และ $B \subset (A \cup B)$
2. $(A \cap B) \subset A$ และ $(A \cap B) \subset B$
3. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

ข้อควรจำ

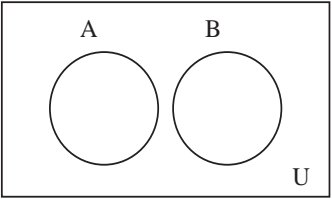
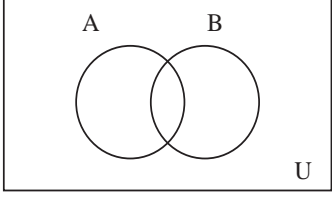
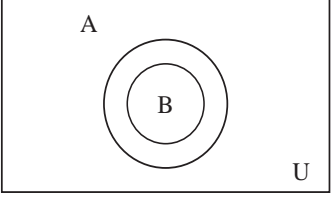
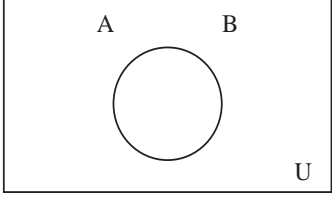
1. เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต
2. เซตว่างเป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซตทุกเซต
3. จำนวนสับเซต = จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต $= 2^n$

1.4 การดำเนินการบนเซต

เอกภพสัมพัทธ์

คือ เซตที่ใช้กำหนดขอบเขตของสิ่งต่างๆ ที่จะกล่าวถึง โดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่นใดซึ่งนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น เขียนแทนด้วย U

1.4.1 ลักษณะต่างๆ ของแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

<p>ถ้า A และ B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน</p> 	<p>ถ้า A และ B เป็นเซตที่มีสมาชิกร่วมกันบางส่วน</p> 
<p>ถ้า $A \subset B$ แต่ $A \neq B$</p> 	<p>ถ้า $A = B$</p> 

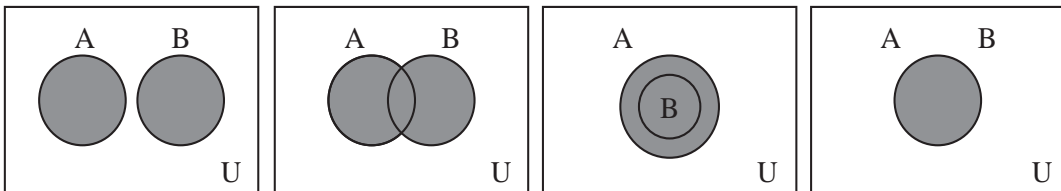
1.4.1.1 ยูเนียน

ถ้ากำหนดเซต A และ B ใดๆ

ยูเนียนของเซต A และ B คือ เซตใหม่ที่ประกอบด้วยจำนวนสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B หรือของเซตทั้งสอง เขียนแทนด้วย $A \cup B$ หรือ $B \cup A$

ดังนั้น $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

แสดง $A \cup B$ ดังส่วนที่แรเงาในแผนภาพ



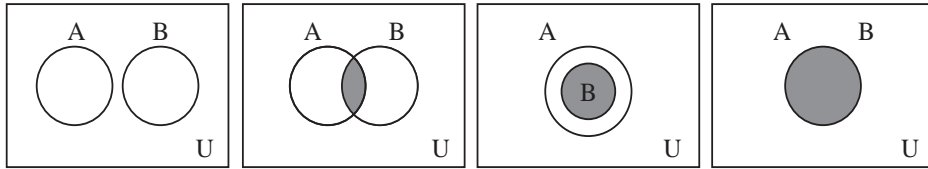
1.4.1.2 อินเตอร์เซกชัน

ถ้ากำหนดเซต A และ B ใดๆ

อินเตอร์เซกชันของเซต A และ B คือ เซตใหม่ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B หรือของเซตทั้งสอง เขียนแทนด้วย $A \cap B$ หรือ $B \cap A$

ดังนั้น $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

แสดง $A \cap B$ ดังส่วนที่แรเงาในแผนภาพ



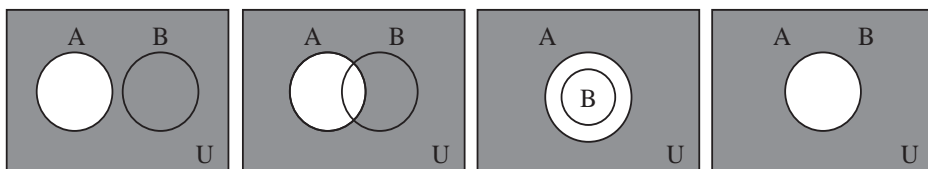
1.4.1.3 คอมพลีเมนต์

กำหนดให้ A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U

คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A' (อ่านว่า เอไพริม)

$$\text{ดังนั้น } A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

แสดง A' ดังส่วนที่แรเงาในแผนภาพ

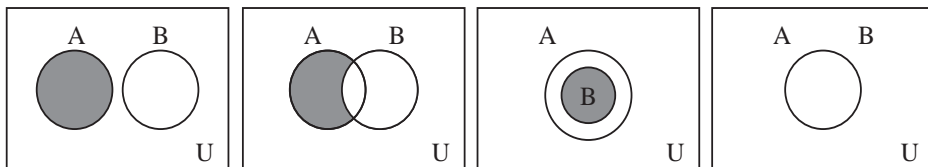


1.4.1.4 ผลต่างของเซต

ถ้ากำหนดเซต A และ B ใดๆ

ผลต่างของเซต A และ B คือ เซตใหม่ที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A - B$

$$\text{ดังนั้น } A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$



สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการบนเซต

ยูเนียน	อินเตอร์เซกชัน
1. $A \cup A = A$	1. $A \cap A = A$
2. $A \cup U = U$	2. $A \cap U = A$
3. $A \cup \emptyset = A$	3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cup B = B \cup A$	4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cup A' = U$	7. $A \cap A' = \emptyset$
8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	9. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

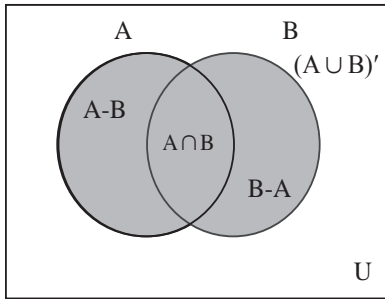
คอมพลีเมนต์	ผลต่างของเซต
1. $(A')' = A$	1. $A - A = \emptyset$
2. $\emptyset' = U$	2. $\emptyset - A = \emptyset$
3. $U' = \emptyset$	3. $A - \emptyset = A$
	4. $A - B = A \cap B'$
	5. $A - B = A - (A \cap B)$

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

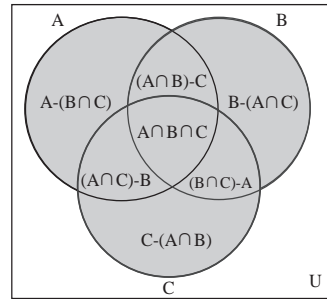
การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดทำได้ 2 วิธีคือ

- **โดยใช้แผนภาพ** การอ่านและการแปลความหมายของส่วนต่างๆ ของแผนภาพเวนน-ฮอยเลอร์

ประเภทมี 2 เซต



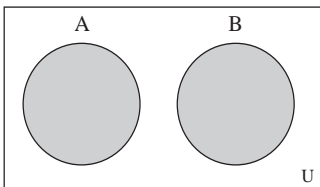
ประเภทมี 3 เซต



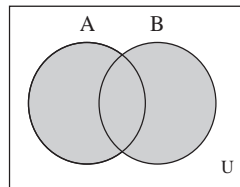
- **โดยใช้สูตร**

กำหนดให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์

- กรณีที่ 1 ถ้า $A \cap B = \emptyset$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



- กรณีที่ 2 ถ้า $A \cap B \neq \emptyset$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



ถ้า A, B และ C เป็นเซตจำกัดใดๆ และ $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ แล้ว

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

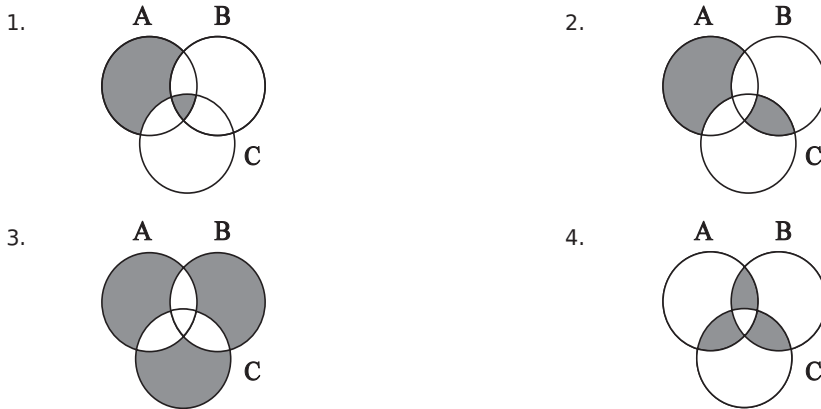
ถ้า A เป็นเซตจำกัดใดๆ แล้ว $n(A)' = n(U) - n(A)$

ข้อสอบท้ายบทที่ 1 เซต

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

- 1) กำหนดให้ A เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตอนันต์ ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ
1. มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ A
 2. มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ B
 3. มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ A
 4. มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ B

2) แผนภาพในข้อใดแทนเซต $((A - B) \cap (A - C)) \cup ((B \cap C) - (A \cap B \cap C))$



- 3) กำหนดให้ A เป็นเซตใดๆ ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ
1. $P(\emptyset) \cap P(P(\emptyset)) = \emptyset$
 2. ถ้า $A = \{\emptyset, 1, \{1, 2\}\}$ แล้ว $A \cap P(A) \neq \emptyset$
 3. มีเซตบางเซตไม่มีสับเซตแท้
 4. มีเซต A ที่ทำให้จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

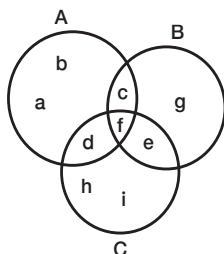
4) กำหนดให้เซต $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{x \mid 2x^2 - 20x + 42 = 0\}$, $C = \{x \mid 2 < x \leq 6\}$ แล้ว $A \cap (B' - C)$ เท่ากับข้อใด

1. $\{1, 2, 8, 9\}$
2. $\{1, 2, 8\}$
3. $\{2, 8\}$
4. $\{2\}$

5) กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ แล้ว $[A - (A \cap B \cap C)] - (A \cap B)$ เท่ากับเซตในข้อใด

1. $(\emptyset)'$
2. $A \cap C'$
3. $U \cap B'$
4. $A - B$

6) กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตดังแผนภาพเวนน-ออยเลอร์ด้านล่าง



ข้อความใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

1. $A - (B \cap C) = \{a, b\}$
2. $A \cap (B \cup C) = \{c, d, f\}$
3. $(A \cup B) - C = \{a, b, g\}$
4. $(C - B) \cap (A - B) = \{f\}$

7) กำหนดให้ A , B และ C เป็นเซต โดยที่

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 12x + 36 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 36 = 0\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 42 = 0\}$$

ข้อใดอธิบายความสัมพันธ์ของแต่ละเซตได้ถูกต้อง

1. $A \subset B \subset C$

2. $A \not\subset B \subset C$

3. $A \subset B \not\subset C$

4. $A \not\subset B \not\subset C$

8) กำหนดให้ A และ B ต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(A \otimes B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

ข. $(A \otimes B)' = (A' \cup B) \cap (A \cap B')$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ ก. และ ข้อ ข. ถูก

2. ข้อ ก. ถูก และ ข้อ ข. ผิด

3. ข้อ ก. ผิด และ ข้อ ข. ถูก

4. ข้อ ก. และ ข้อ ข. ผิด

9) กำหนดให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า } 20\}$

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า } 50\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า } 60 \text{ และเลขโดดในหลักสิบเป็นเลขคู่}\}$$

จงหาจำนวนสมาชิกของ $A - (C \cap B)$ ว่ามีจำนวนเท่าใด

1. 4

2. 6

3. 8

4. 10

10) กำหนดให้ A และ B เป็นเซต ถ้า A มีสมาชิกจำนวน 10 ตัว และ B มีสมาชิกจำนวน 5 ตัว จงหาจำนวนสมาชิกของ $(A - B) \cup (A \cap B)$ ว่ามีจำนวนเท่าใด

1. 5

2. 10

3. 15

4. 20

11) กำหนดให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $n(A \cup B) = 72$ และ $n[(A - B) \cup (B - A)] = 64$ ถ้า $n(A) = 30$ แล้ว $n(B)$ มีค่าเท่าใด

1. 20

2. 30

3. 50

4. 60

12) นักเรียนโรงเรียนแห่งกาวิทยาจำนวน 60 คน แต่ละคนต้องเรียนวิชาคณิตศาสตร์หรือวิชาภาษาไทยอย่างน้อย 1 วิชา ถ้ามีนักเรียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 28 คน และเรียนวิชาภาษาไทย 34 คน แล้วจำนวนนักเรียนที่เรียนทั้งวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาไทยมีจำนวนกี่คน

1. 2

2. 8

3. 10

4. 11

13) จากการสำรวจความชอบเครื่องดื่ม 2 ชนิดของคนที่มาทานอาหารที่ร้าน M & A จำนวน 45 คน พบว่าชอบดื่มน้ำเย็นห่อ A จำนวน 25 คน ชอบดื่มน้ำเย็นห่อ B จำนวน 30 คน และมี 35 คน ชอบดื่มน้ำเย็นห่อหนึ่งยี่ห้อ อยากรทราบว่ามีกี่คนที่ชอบดื่มน้ำเย็นห่อทั้งสองยี่ห้อ

1. 10

2. 20

3. 30

4. 40

เฉลยข้อสอบท้ายบทที่ 1 เซต

1) ตอบ 3.

อธิบาย

สมมติเซต

$A = \{0, 1\}$ เป็นเซตจำกัดและ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ เป็นเซตอนันต์

ตัวเลือก ข้อ 1. มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ A เป็นจริง เพราะว่า $\{0\}$ เป็นเซตจำกัด และเป็นสับเซตของ A

ตัวเลือก ข้อ 2. มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ B เป็นจริง เพราะว่า $\{0\}$ เป็นเซตจำกัด และเป็นสับเซตของ B

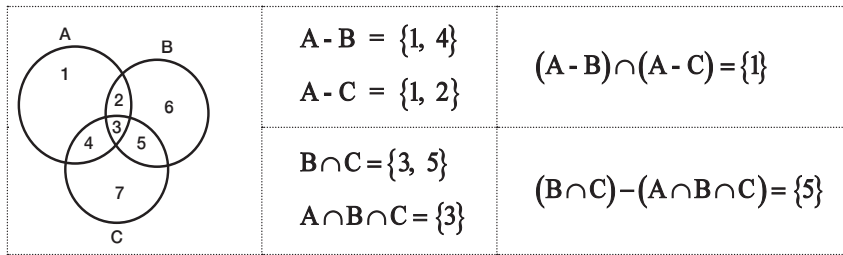
ตัวเลือก ข้อ 3. มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ A เป็นเท็จ เพราะว่า A มีสับเซตเพียง 4 เซตคือ $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ ซึ่งล้วนแต่เป็นเซตจำกัด

ตัวเลือก ข้อ 4. มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ B เป็นจริง เพราะว่า $\{2, 3, 4, \dots\}$ เป็นเซตอนันต์ และเป็นสับเซตของ B

2) ตอบ 2.

อธิบาย

สมมติเซตขึ้นมา 3 เซตคือ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6\}, C = \{3, 4, 5, 7\}$ นำสมาชิกของเซตทั้งสามมาเขียนในแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



ดังนั้น $((A - B) \cap (A - C)) \cup ((B \cap C) - (A \cap B \cap C)) = \{1, 5\}$

ส่วนที่แรเงาคือ พื้นที่หมายเลข 1 และ 5

3) ตอบ 1.

อธิบาย

ตัวเลือก ข้อ 1.

$P(\emptyset) \cap P(P(\emptyset)) = \emptyset$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\emptyset) \cap P(P(\emptyset)) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

ตัวเลือก ข้อ 2.

ถ้า $A = \{\emptyset, 1, \{1, 2\}\}$ แล้ว $A \cap P(A) \neq \emptyset$ เป็นจริง

เพราะว่า $A = \{\emptyset, 1, \{1, 2\}\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1, \{1, 2\}\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{\emptyset, 1, \{1, 2\}\}$

$A \cap P(A) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

ตัวเลือก ข้อ 3.

มีเซตบางเซตไม่มีสับเซตแท้ เป็นจริง

เพราะว่าถ้า $A = \emptyset$ จะพบว่าสับเซตของ

A คือ \emptyset ซึ่ง \emptyset ไม่ใช่สับเซตแท้

ตัวเลือก ข้อ 4.

มีเซต A ที่ทำให้จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เป็นจำนวนเฉพาะ เป็นจริง

เพราะว่าถ้า $A = \{2\}$ พบว่าจำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^1 = 2$ เซต

ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะ

4) ตอบ 2.

อธิบาย

เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกจะได้ว่า $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$
 จาก $A \cap (B - C) = A \cap (B' \cap C')$ นั่นคือ $A \cap (B - C) = \{1, 2, 8\}$

5) ตอบ 4.

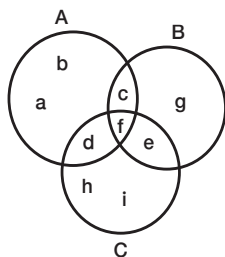
อธิบาย

$$\begin{aligned} [A - (A \cap B \cap C)] - (A \cap B) &= [A - (A \cap B \cap C)] \cap (A \cap B)' \\ &= A \cap (A \cap B)' \\ &= A \cap (A' \cup B') \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= \emptyset \cup (A \cap B') \\ &= (A \cap B') \\ &= A - B \end{aligned}$$

6) ตอบ 2.

อธิบาย

จากแผนภาพ



$A = \{a, b, c, d, f\}$ $B = \{c, e, f, g\}$ $C = \{d, e, f, h, i\}$
 ตัวเลือก ข้อ 1. เป็นเท็จ เพราะว่า $A - (B \cap C) = \{a, b, c, d\}$
 ตัวเลือก ข้อ 2. เป็นจริง เพราะว่า $A \cap (B \cup C) = \{c, d, f\}$
 ตัวเลือก ข้อ 3. เป็นเท็จ เพราะว่า $(A \cup B) - C = \{a, b, c, g\}$
 ตัวเลือก ข้อ 4. เป็นเท็จ เพราะว่า $(C - B) \cap (A - B) = \{d\}$

7) ตอบ 3.

อธิบาย

อันดับแรกต้องหาสมาชิกในแต่ละเซต โดยการแยกตัวประกอบ ได้สมาชิกดังนี้

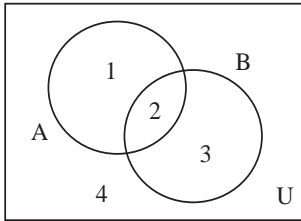
$A = \{6\}$, $B = \{6, -6\}$, $C = \{-6, 7\}$ จะเห็นได้ว่า $A \subset B \not\subset C$

8) ตอบ 1.

อธิบาย

สมมติให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

เขียนแผนภาพเวเนน-ออยเลอร์ได้ดังนี้



จาก $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\}$ ดังนั้น $(A \otimes B)' = \{2, 4\}$

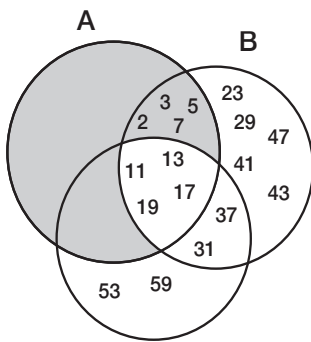
พิจารณา ข้อ ก. $(A \otimes B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B') = \{2, 4\}$ เป็นจริง

ข้อ ข. $(A \otimes B)' = (A' \cap B) \cap (A \cap B') = \{2, 4\}$ เป็นจริง

9) ตอบ 1.

อธิบาย

เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก และเขียนแผนภาพเวเนน-ออยเลอร์ได้ดังนี้



$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

$C = \{11, 13, 17, 19, 31, 37, 53, 59\}$

ดังนั้น $n[A - (C \cap B)] = 4$

10) ตอบ 2.

อธิบาย

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (B' \cup B)$$

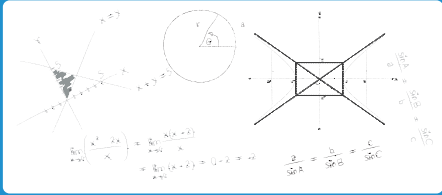
$$= A \cap U$$

$$= A$$

$$\text{ดังนั้น } n[(A - B) \cup (A \cap B)] = n(A) = 10$$

inspire คณิตศาสตร์

ม.ปลาย มั่นใจเต็ม 100



เนื้อหาจัดเต็ม

คณิตฯ พื้นฐานและเพิ่มเติม เลือกอ่านในเรื่องที่เราไม่เข้าใจได้เลย แต่การทบทวนทุกเรื่องจะทำให้เรามีความมั่นใจในวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น

สมาคมฯ PAT 1
ชิงทุน O-NET สอบตรง
แอดมิชชัน โควตา

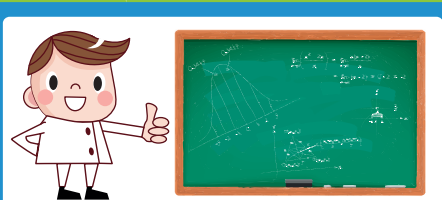
พร้อมลุยทุกสนามสอบ

O-NET, แอดมิชชัน, PAT 1, สอบตรง, โควตา, ชิงทุน, สมาคมฯ



การสรุปเนื้อหาที่เข้าใจง่าย

การอ่านทบทวนและทำความเข้าใจหลายๆ รอบ ก็จะสามารถเพิ่มคะแนนและทำให้เกิดความชำนาญ กล้าเผชิญกับโจทย์คณิตฯ ในทุกเรื่องทุกบท...



วาดภาพอธิบาย

การอธิบาย วิธีทำที่ละเอียดเป็นเพียงส่วนหนึ่งของทฤษฎี แต่การวาดภาพเพื่ออธิบายเป็นหัวใจที่จะทำให้เข้าใจคณิตศาสตร์ง่ายขึ้น

ขึ้นชื่อว่า “คณิตศาสตร์” วิชาที่สร้างความลำบากใจให้นักเรียนไทย ทุกครั้งที่ต้องสอบ โดยเฉพาะนักเรียนชั้น ม.ปลาย ที่มีภาระสอบติดพันกันทั้งปี เพราะแม้จะตั้งใจเรียนกันเพียงใด แต่ส่วนใหญ่ก็ยังไม่เข้าใจเต็มที่ ยิ่งใกล้ช่วงสอบก็ยิ่งเครียดหนัก คุณพ่อคุณแม่คงทำได้ดีที่สุดแค่รอยยิ้มและกำลังใจ ในเมื่อฟังใครไม่ได้ ก็หันไม่พ้นต้องฟังตนเอง แต่นับว่าโชคดียังมีหนังสือเล่มนี้อยู่ข้างกาย

เพราะคณิตศาสตร์เมื่อขาดความเข้าใจยอมไม่ได้ลำบาก เข้าใจแล้วก็ต้องฝึกฝนจนคล่องแคล่ว โดยหนังสือเล่มนี้ช่วยให้เราค้นพบคณิตศาสตร์ที่เข้าใจได้ง่ายกว่า เพราะเรียบเรียงจากทีมครูที่รู้ปัญหาของนักเรียน (ไม่แค่เพียงปัญหาคณิตศาสตร์) คัดสรรโจทย์ที่เสริมความมั่นใจ ตั้งแต่ง่ายเรื่อยไปจนเข้าขั้นเทพ พร้อมแบบทดสอบที่พร้อมรับกับทุกสนามสอบ ตั้งแต่ O-NET, PAT 1 พร้อมสนามโควตา และสอบตรงทุกที่



ศิลาพร แสงใส

ศศิรส แสงใส

ทองพูน โพธิ์สาร

บรรณาธิการ
ศิริกาญจน์ รวบรวม

จัดจำหน่ายโดย IDC
ISBN 885-916-100-375-5

