A+ Think Beyond

ตะลุยโจทย์ สอวน. คณิตศาสตร์

พิชิตเหรียญทองโอลิมปิก

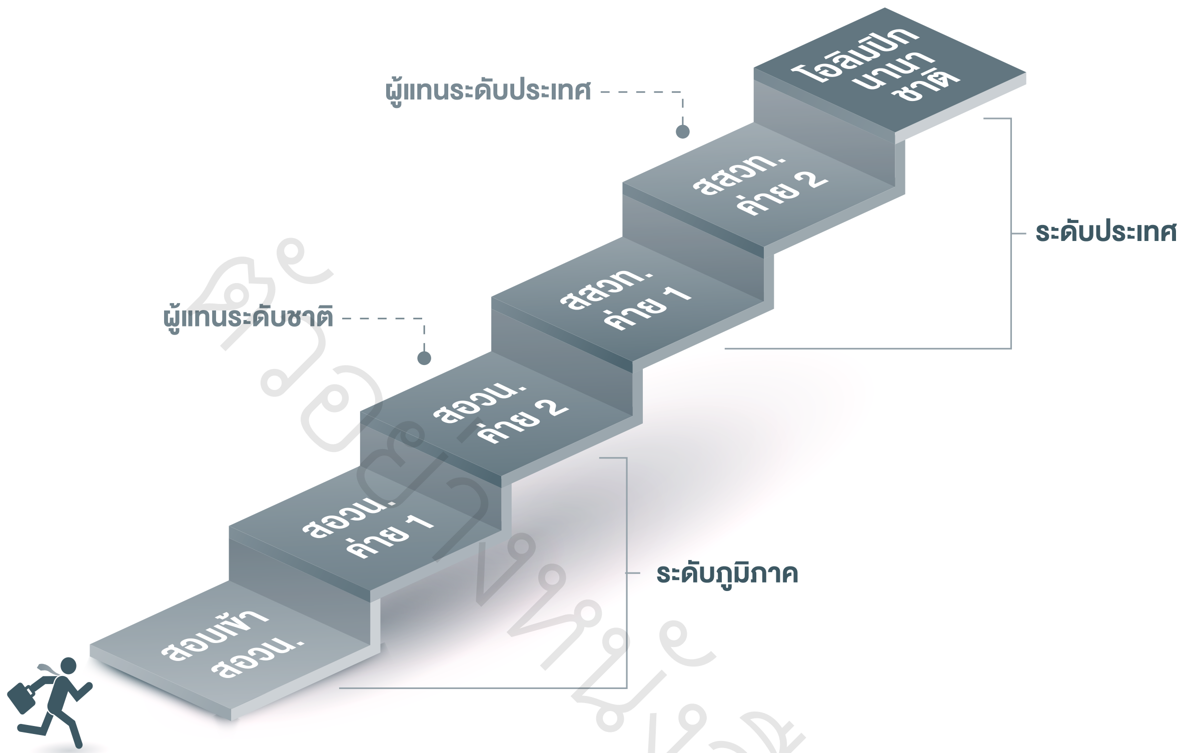
เหมาะสำหรับเตรียมความพร้อมเพื่อคัดเลือกเข้าสู่ ค่าย สอวน.
และเตรียมความพร้อมสู่การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

จัดจำหน่ายโดย IDC PREMIER

รวมแนวข้อสอบไว้ 250 ข้อ
พร้อมเฉลยอธิบายละเอียดทุกข้อ

โดย ณัฐพล บัณฑิตเสน

เส้นทาง สู่โอลิมปิกวิชาการ



ข้อดีของการเป็นเด็กค่าย สอวน.

- ได้ประสบการณ์ที่มากกว่าในโรงเรียนปกติ
- ได้เรียนเกินจากหลักสูตรกับอาจารย์ระดับมหาวิทยาลัย
- ได้เป็นตัวแทนระดับประเทศ
- ได้รับประกาศนียบัตรสำหรับเข้ามหาวิทยาลัย
- ได้ทุนการศึกษา
- ได้มิตรภาพ ได้แลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนในค่าย
- ได้ความภูมิใจในตนเอง ☺

แนวข้อสอบคณิตศาสตร์

1. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + a^{-1} = 3\sqrt{3}$ จงหาค่าของ $(a^3 - a^{-3})^2$

2. จงหาจำนวนเต็มบวก i ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก j ที่สอดคล้องกับสมการ $1{,}000 = i + (i + 1) + (i + 2) + \ldots + (i + j)$

29. จำนวนเต็มสามจำนวนมีผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เท่ากับ 1764 แล้วสามจำนวนนั้นรวมกันจะมีค่ามากที่สุดได้เท่าใด

30. การหา ห.ร.ม. ของจำนวนเต็ม x และ y ด้วยขั้นตอนของยูคลิด จะทำขั้นตอนการหารในลักษณะดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
x &= yq_1 + r_1 \\
y &= r_1q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n
\end{aligned}$$

ถ้า $0 < x \leq y \leq 120$ แล้ว n จะมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

43. จงหาทุกจำนวน $a = \overline{a_1a_2a_3}$ ซึ่งเป็นเลขสามหลัก ที่มีเลขโดดทั้งสามไม่ซ้ำกัน และเป็นไปตามเงื่อนไข

ก. $n(d(a)) = n(d(2a)) = n(d(3a))$

ข. $d(a) \cup d(2a) \cup d(3a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ $d(a)$ เป็นเซตของเลขโดดที่เขียนแทน a เช่น $d(3463) = \{3, 4, 6\}$, $d(25835) = \{2, 3, 5, 8\}$, $d(11111) = \{1\}$ เป็นต้น

44. ให้ $Y = \{\text{ห.ร.ม.}\ (5x + 6, 8x + 29) \mid x \in Z\}$ จงหาว่าผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน Y เท่ากับเท่าไร เมื่อ Z เป็นจำนวนเต็ม

79. ให้ $A = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2021^2} + \frac{1}{2022^2}}$

ถ้า $A = \frac{x}{y} + z$ โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก $x < y$ และ $\frac{x}{y}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้ว $x + y$ เท่ากับเท่าไร

80. ให้ a, b, c เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$(a + b)(a + b + c) = 18$$

$$(b + c)(a + b + c) = 30$$

$$(c + a)(a + b + c) = 2$$

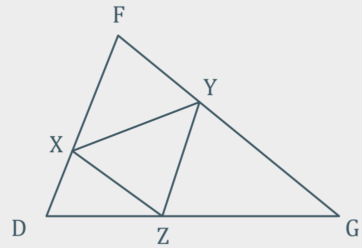
จงหา $a + b + c$ เท่ากับเท่าไร

121. สามเหลี่ยม DFG มีจุด X, Y, Z เป็นจุดแบ่งด้าน DF, FG, DG ตามลำดับ

โดยที่อัตราส่วน $\frac{\overline{DX}}{\overline{DF}} = a, \frac{\overline{FY}}{\overline{FG}} = b, \frac{\overline{GZ}}{\overline{GD}} = c$

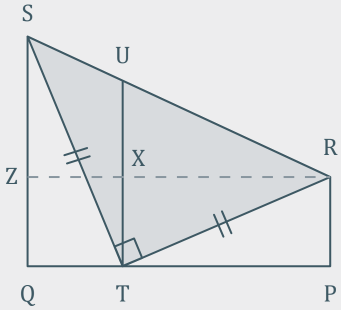
และกำหนดให้ $a + b + c = \frac{2}{3}, a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{5}$

แล้ว $\frac{\text{พื้นที่} \triangle XYZ}{\text{พื้นที่} \triangle DFG}$ มีค่าเท่าใด

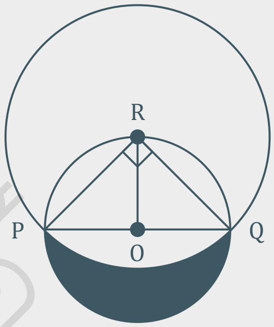


122. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 7 หน่วย และความยาวของด้านอีกสองด้านเป็นจำนวนเต็มหน่วย พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้เป็นเท่าไร

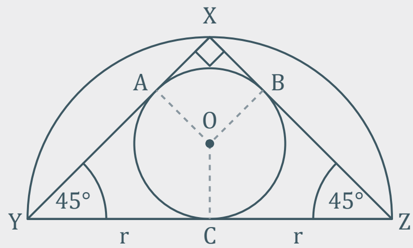
137. จากรูป $\overline{PR} = \overline{QT} = 10$ เมตร และ $\overline{RT} = \overline{TS}$ โดยมี $\overline{RP}$, $\overline{UT}$ และ $\overline{SQ}$ ตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ ถ้าสามเหลี่ยม RTS มีพื้นที่ 338 ตารางเมตร แล้ว $\overline{UT}$ ยาวกี่เมตร



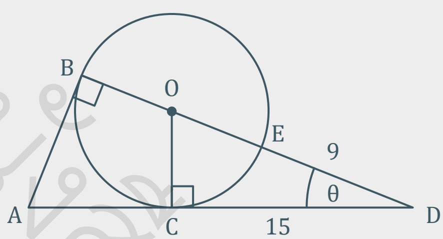
138. ให้ PQR เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก โดยที่มุม $Q\hat{R}P$ เป็นมุมฉาก ลากเส้น $\overline{RO}$ ตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ จากนั้นสร้างวงกลม ดังรูป วงกลมเล็กมี O เป็นจุดศูนย์กลาง มี $\overline{OP}$ เป็นรัศมี วงกลมใหญ่มี R เป็นจุดศูนย์กลาง มี $\overline{RP}$ เป็นรัศมี ถ้า $\overline{OR} = 3$ หน่วย แล้วพื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับกี่ตารางหน่วย



201. ครึ่งวงกลมรัศมี r มีสามเหลี่ยมหน้าจั่วแนบอยู่ภายใน มีฐานเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งวงกลม มีวงกลมเล็กแนบในสามเหลี่ยมหน้าจั่วรัศมี s จงหา $\frac{s}{r}$



202. จุด A เป็นจุดภายนอกของวงกลม O ลากเส้นจาก A มาสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ต่อ $\overline{AC}$ ไปพบส่วนต่อของเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{BE}$ ที่จุด D กำหนดให้ $\overline{DE} = 9$ นิ้ว, $\overline{DC} = 15$ นิ้ว แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABD เป็นเท่าไร



241. ให้ $f : I \longrightarrow I$ ที่กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & ; x \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{x}{2} & ; x \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จงหาจำนวนเต็ม k ทุกจำนวนที่สอดคล้องกับ $f(f(f(k))) = 12$

242. กำหนดลำดับของจำนวนเต็มบวกที่เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 2, ...

จงหาผลบวกของ 2332 พจน์แรกของลำดับข้างต้น

249. เส้นตรงความชัน $-\frac{4}{3}$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ โดยตัดวงกลมที่จุด P กับจุด Q หากกำหนดจุด R(–1, –2) แล้ว ให้หาพื้นที่สามเหลี่ยม PQR

250. จงหาค่า a ที่น้อยที่สุด เมื่อ

ก. $a > 0$

ข. $y = ax$ สัมผัสกับ $x^2 + y^2 - 14x + 49 = a^2$

เฉลย
แนวข้อสอบ
250 ข้อ

เฉลยแนวข้อสอบ

1. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + a^{-1} = 3\sqrt{3}$ จงหาค่าของ $(a^3 - a^{-3})^2$

วิธีคิด พิจารณา

$$\begin{aligned}
(a^3 - a^{-3})^2 &= (a^3 - a^{-3})(a^3 - a^{-3}) \\
&= a^6 - 2 + \frac{1}{a^6} \\
&= (a^3)^2 - 2 + \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 \\
&= (a^3)^2 + (2 - 2) - 2 + \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 \\
&= (a^3)^2 + 2 + \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 - 4 \\
&= \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^2 - 4 \\
&= \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right)\right)^2 - 4 \\
&= \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 3\right)\right)^2 - 4 \\
&= \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right)\right)^2 - 4 \\
&= (a + a^{-1})^2((a + a^{-1})^2 - 3)^2 - 4
\end{aligned}$$

เมื่อ $a + a^{-1} = 3\sqrt{3}$ จะได้

$$\begin{aligned}
(a^3 - a^{-3})^2 &= (3\sqrt{3})^2((3\sqrt{3})^2 - 3)^2 - 4 \\
&= (27)(27 - 3)^2 - 4 \\
&= (27 \times 576) - 4 \\
&= 15{,}552 - 4
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(a^3 - a^{-3})^2 = 15{,}548$ #

2. จงหาจำนวนเต็มบวก i ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก j ที่สอดคล้องกับสมการ
$1{,}000 = i + (i+1) + (i+2) + \dots + (i+j)$

วิธีคิด จาก $1{,}000 = i + (i+1) + (i+2) + \dots + (i+j)$ ..... ①

จัดรูปใหม่เป็น $1{,}000 = (i+j) + (i+j-1) + (i+j-2) + \dots + i$ ..... ②

นำ ① + ②; $2{,}000 = (2i+j) + (2i+j) + (2i+j) + \dots + (2i+j)$ จำนวน $j+1$ เทอม

$$2 \times 10^3 = (2i+j)(j+1)$$

$$2^4 \times 5^3 = (2i+j)(j+1) \quad \text{..... ③}$$

ข้อสังเกต เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด แสดงว่าต้องหาค่า $j+1$ มากที่สุด
โดยที่ $j + 1 < \sqrt{2{,}000} \approx 44.7$ ประมาณเป็นจำนวนเต็มบวก 45

ดังนั้น ตัวประกอบของ 2,000 ที่มากที่สุดแต่ไม่เกิน 45 คือ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 25 และ 40

เมื่อ $j + 1 = 40$

$j = 39$

แทนใน ③ จะได้ $2^4 \times 5^3 = (2i+39)(39+1)$

$$2{,}000 = (2i+39)(40)$$

$$50 = 2i + 39$$

$$i = \frac{50-39}{2} = 5.5$$

เมื่อ $j + 1 = 25$

$j = 24$

แทนใน ③ จะได้ $2^4 \times 5^3 = (2i+j)(j+1)$

$$2{,}000 = (2i+24)(25)$$

$$80 = 2i + 24$$

$$i = \frac{80-24}{2} = 28$$

ค่า $i = 5.5$ ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก จึงไม่ตรงกับเงื่อนไข
ดังนั้น จำนวนเต็มบวก i ที่น้อยที่สุด คือ 28 #

3. จำนวนเต็มบวก X ในเลขฐานสิบจำนวนหนึ่ง ประกอบด้วยเลขหกหลักเขียนแทนได้เป็น
$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ ถ้า $a_5 = 9$ และ $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = \frac{1}{25}X$ แล้ว $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ เท่ากับเท่าไร

วิธีคิด จากโจทย์ $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = X$

และ $a_5 = 9$

ดังนั้น $a_500{,}000 = 900{,}000$

$$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} - a_500{,}000 = X - 900{,}000$$

$$\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = X - 900{,}000 \quad \text{..... ①}$$

และจากโจทย์ $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = \frac{1}{25}X$

แทนค่าใน ① จะได้ $\frac{1}{25}X = X - 900{,}000$

$$900{,}000 = X - \frac{1}{25}X$$

$$\frac{p}{q} = \frac{x^2}{2x^2}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $p + q = 1 + 2 = 3$ #

43. จงหาทุกจำนวน $a = \overline{a_1a_2a_3}$ ซึ่งเป็นเลขสามหลัก ที่มีเลขโดดทั้งสามไม่ซ้ำกัน และเป็นไปตามเงื่อนไข

ก. $n(d(a)) = n(d(2a)) = n(d(3a))$

ข. $d(a) \cup d(2a) \cup d(3a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ $d(a)$ เป็นเซตของเลขโดดที่เขียนแทน a เช่น $d(3463) = \{3, 4, 6\}$, $d(25835) = \{2, 3, 5, 8\}$, $d(11111) = \{1\}$ เป็นต้น

วิธีคิด จากเงื่อนไข ข. $d(a) \cup d(2a) \cup d(3a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

จะได้ a, 2a, 3a จะต้องเป็นเลข 3 หลักที่มีเลขโดดไม่ซ้ำกันและไม่มีเลข 0

ซึ่ง a จะมี a_1 เป็นได้เพียง 1, 2, 3 เท่านั้น เพื่อให้ 2a และ 3a ยังคงเป็นเลขสามหลัก

กรณี $a_1 = 1$

พิจารณาหลักหน่วยที่เป็นไปได้มีทั้งหมด 6 แบบ ดังนี้

หลักหน่วยของ a	หลักหน่วยของ 2a	หลักหน่วยของ 3a
2	4	6
3	6	9
4	8	2
6	2	8
8	6	4
9	8	7

ถ้าหลักหน่วยของ (a, 2a, 3a) คือ (2, 4, 6)

$a = 1x2$, $2a = 3y4$, $3a = 5z6$ เหลือ 7, 8, 9

$\downarrow$

จะตรงเงื่อนไขได้เฉพาะ $a = 192$, $2a = 384$, $3a = 576$

5 แบบที่เหลือ เมื่อพิจารณาแล้วไม่พบค่า a ที่ตรงตามเงื่อนไข

แสดงว่า กรณี $a_1 = 1$ ค่า a ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ 192

79. ให้ $A = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}}$

ถ้า $A = \frac{x}{y} + z$ โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก $x < y$ และ $\frac{x}{y}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้ว $x + y$ เท่ากับเท่าไร

<u>วิธีคิด</u> เมื่อ $i \geq 1$ จัดรูปแบบใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2} &= 1+\left(\frac{1}{i^2}-\frac{2}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)^2}\right)+\frac{2}{i(i+1)}\\ &= 1+\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)^2+2\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)^2\end{aligned}$$

แสดงว่า $\sqrt{1+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2}} = 1+\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$ ..... (1)

แทน (1) ลงใน

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}}\\ &= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{1}\right)+(1)+(1)+\dots+\left(1-\frac{1}{2022}\right)\\ &= 2021+\left(1-\frac{1}{2022}\right)\\ &= 2021+\frac{2021}{2022}\\ &= \frac{2021}{2022}+2021\end{aligned}$$

จาก $A = \frac{x}{y} + z$ จะได้ $x = 2021$ และ $y = 2022$

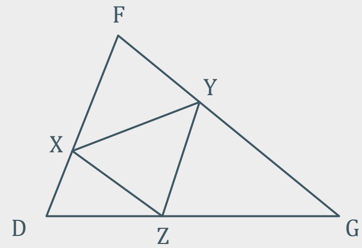
ดังนั้น $x + y = 2021 + 2022 = 4043$ #

121. สามเหลี่ยม DFG มีจุด X, Y, Z เป็นจุดแบ่งด้าน DF, FG, DG ตามลำดับ

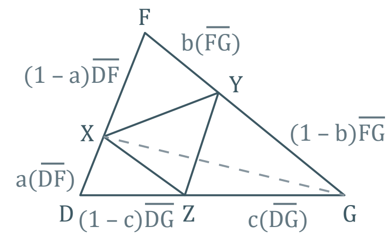
โดยที่อัตราส่วน $\frac{\overline{DX}}{\overline{DF}} = a, \frac{\overline{FY}}{\overline{FG}} = b, \frac{\overline{GZ}}{\overline{GD}} = c$

และกำหนดให้ $a + b + c = \frac{2}{3}, a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{5}$

แล้ว $\frac{\text{พื้นที่ } \triangle XYZ}{\text{พื้นที่ } \triangle DFG}$ มีค่าเท่าใด



วิธีคิด จากรูป $\text{พื้นที่ } \triangle DXZ = \frac{\overline{DZ}}{\overline{DG}} \times \text{พื้นที่ } \triangle DXG$



$$= \frac{\overline{DZ}}{\overline{DG}} \times \frac{\overline{DX}}{\overline{DF}} \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

$$= \frac{(1-c)\overline{DG}}{\overline{DG}} \times \frac{a(\overline{DF})}{\overline{DF}} \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

$$= (1-c)a \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

ในทำนองเดียวกัน $\text{พื้นที่ } \triangle FXY = (1-a)b \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$

$\text{พื้นที่ } \triangle GYZ = (1-b)c \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$

$\text{พื้นที่ } \triangle XYZ = \text{พื้นที่ } \triangle DFG - \text{พื้นที่ } \triangle DXZ - \text{พื้นที่ } \triangle FXY - \text{พื้นที่ } \triangle GYZ$

$$= \{1 - (1-c)a - (1-a)b - (1-b)c\} \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

$$= \{1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca)\} \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

จาก

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$ab + ac + bc = \frac{1}{2}\left((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right)$

$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{5}\right)\right) \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

$$= \frac{16}{45} \times \text{พื้นที่ } \triangle DFG$$

ดังนั้น $\frac{\text{พื้นที่ } \triangle XYZ}{\text{พื้นที่ } \triangle DFG} = \frac{16}{45}$ #

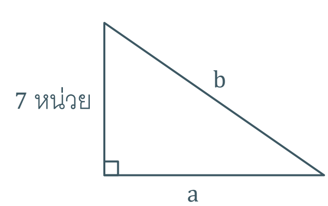
122. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 7 หน่วย และความยาวของด้านอีกสองด้านเป็นจำนวนเต็มหน่วย พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้เป็นเท่าไร

วิธีคิด กำหนดให้ ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกหนึ่งด้านยาว a หน่วย ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $a^2 + 7^2 = b^2$

$$b^2 - a^2 = 7^2$$

$$(b+a)(b-a) = 49 \times 1$$



โจทย์กำหนดให้ $\triangle RST$ มีพื้นที่ 338 ตารางเมตร

$$\text{พื้นที่ } \triangle RST = \frac{1}{2} \times \overline{RT} \times \overline{TS}$$

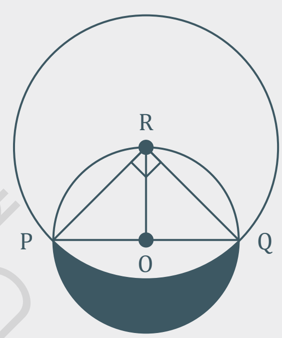
จาก $\overline{RT} = \overline{TS}$
$$338 = \frac{1}{2} \times \overline{TS}^2$$
$$676 = \overline{TS}^2$$
$$\overline{TS} = \sqrt{676}$$
$$\overline{TS} = 26 \text{ เมตร}$$

ตามทฤษฎีของพีทาโกรัส
$$\overline{RP}^2 + \overline{PT}^2 = \overline{TR}^2$$
$$10^2 + \overline{PT}^2 = 26^2$$
$$\overline{PT} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ เมตร}$$

พิจารณาจากสามเหลี่ยมคล้าย $\triangle UXR \sim \triangle SZR$ จะได้
$$\frac{\overline{UX}}{24} = \frac{24 - 10}{24 + 10}$$
$$\overline{UX} = \frac{14 \times 24}{34}$$
$$\overline{UX} = 9.88 \text{ เมตร}$$

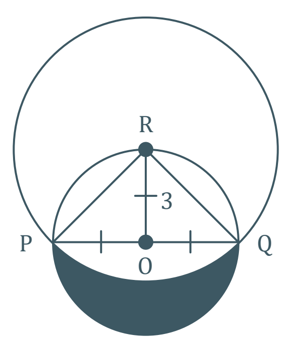
ดังนั้น $\overline{UT} = \overline{UX} + 10 = 19.88$ เมตร #

138. ให้ PQR เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก โดยที่มุม $Q\hat{R}P$ เป็นมุมฉาก ลากเส้น $\overline{RO}$ ตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ จากนั้นสร้างวงกลม ดังรูป วงกลมเล็กมี O เป็นจุดศูนย์กลาง มี $\overline{OP}$ เป็นรัศมี วงกลมใหญ่มี R เป็นจุดศูนย์กลาง มี $\overline{RP}$ เป็นรัศมี ถ้า $\overline{OR} = 3$ หน่วย แล้วพื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับกี่ตารางหน่วย

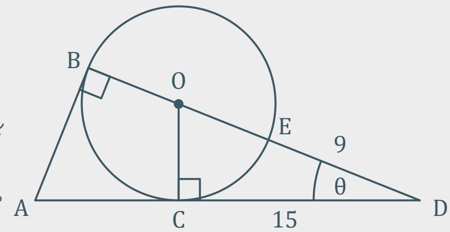


<u>วิธีคิด</u> จากโจทย์ $\overline{OR} = 3$ และสามเหลี่ยม PQR มีมุม R เป็นมุมฉาก

พิจารณา $\triangle PQR$ จะได้
$$6^2 = r^2 + r^2$$
$$36 = 2r^2$$
$$r = 3\sqrt{2}$$
$$\text{พื้นที่ } \triangle PQR = \frac{1}{2}(r)(r)$$
$$= \frac{1}{2}(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})$$
$$= 9 \text{ ตารางหน่วย}$$



202. จุด A เป็นจุดภายนอกของวงกลม O ลากเส้นจาก A มาสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ต่อ $\overline{AC}$ ไปพบส่วนต่อของเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{BE}$ ที่จุด D กำหนดให้ $\overline{DE} = 9$ นิ้ว, $\overline{DC} = 15$ นิ้ว แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABD เป็นเท่าไร



<u>วิธีคิด</u> จากรูป $\triangle$ OCD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้
$$\overline{CD}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2$$
$$15^2 + r^2 = (r + 9)^2$$
$$225 + r^2 = r^2 + 18r + 81$$
$$225 = 18r + 81$$
$$r = \frac{(225 - 81)}{18}$$
$$r = 8 \text{ นิ้ว}$$

พิจารณา $\triangle$ OCD จะได้ $\tan\theta = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \dfrac{8}{15}$ ..... ①

พิจารณา $\triangle$ ABD จะได้ $\tan\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ ..... ②

เมื่อ ① = ② จะได้
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$
$$\frac{8}{15} = \frac{\overline{AB}}{9 + 2(8)}$$
$$\frac{200}{15} = \overline{AB}$$
$$\overline{AB} = \frac{40}{3}$$

ดังนั้น
$$\text{พื้นที่ } \triangle ABD = \frac{1}{2} \times \frac{40}{3} \times (9 + 2(8))$$
$$= \frac{500}{3} \text{ ตารางนิ้ว}$$
#

จะได้ว่า มี 50 เป็นตัวประกอบ ของ $\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$ เมื่อ $i = 12$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก i ที่น้อยที่สุด คือ 12 #

241. ให้ $f : I \longrightarrow I$ ที่กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{x}{2} & ; x \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จงหาจำนวนเต็ม k ทุกจำนวนที่สอดคล้องกับ $f\big(f(f(k))\big) = 12$

<u>**วิธีคิด**</u> **พิจารณา k เป็นจำนวนคี่**

ดังนั้น $f(f(f(k))) = 12$

$f\left(\frac{k+3}{2}\right) = 12$ เป็นไปได้ 2 กรณี

กรณี $\frac{k+3}{2}$ เป็นจำนวนคี่	กรณี $\frac{k+3}{2}$ เป็นจำนวนคู่
$\frac{k+3}{2} + 3 = 12$ $k = 15$	$\frac{k+3}{4} = 12$ $k = 45$

แทนค่า $f(f(f(45))) = 12$ และ

$f(f(f(15))) = 12$

พิจารณา k เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $f(f(f(k))) = 12$

$f\left(f\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 12$ เป็นไปได้ 2 กรณี

<table>
<tr><th rowspan="3">กรณี $\frac{k}{2}$ เป็นจำนวนคี่</th><th colspan="2">กรณี $\frac{k}{2}$ เป็นจำนวนคู่</th></tr>
<tr><td colspan="2">$f\left(\frac{k}{4}\right) = 12$ เป็นได้อีก 2 กรณี</td></tr>
<tr><th>กรณี $\frac{k}{4}$ เป็นจำนวนคี่</th><th>กรณี $\frac{k}{4}$ เป็นจำนวนคู่</th></tr>
<tr><td>$f\left(\frac{k}{2}+3\right) = 12$
$\frac{\frac{k}{2}+3}{2} = 12$
$k = 42$</td><td>$\frac{k}{4} + 3 = 12$
$k = 36$</td><td>$\frac{k}{8} = 12$
$k = 96$</td></tr>
</table>

จะได้ $f(f(f(42))) = 12$

$f(f(f(36))) = 12$

$f(f(f(96))) = 12$

ดังนั้น k ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 5 ตัว คือ 15, 36, 42, 45, 96 #

242. กำหนดลำดับของจำนวนเต็มบวกที่เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 2, ...

จงหาผลบวกของ 2332 พจน์แรกของลำดับข้างต้น

วิธีคิด จากโจทย์ ลำดับคือ 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 2, ...

พิจารณาลำดับที่มีค่าเป็น 2

$$a_n = 2 \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

$$n = 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots$$

$$n = \frac{i(i+1)}{2} \qquad \text{โดยที่ } i = 1, 2, 3, \ldots$$

ซึ่งลำดับมีไม่เกิน 2332 พจน์

$$n \leq 2332$$

แสดงว่า $\frac{i(i+1)}{2} \leq 2332$

ถ้า $i = 67$ จะได้ $\frac{67(67+1)}{2} = 2278$

ถ้า $i = 68$ จะได้ $\frac{68(68+1)}{2} = 2346$

จำนวนลำดับที่มีค่าเป็น 2 มี 67 พจน์

จะได้จำนวนลำดับที่มีค่าเป็น 3 = 2332 – 67 = 2265 พจน์

ดังนั้น ผลบวกของ 2332 พจน์แรกของลำดับข้างต้น $= 2265(3) + 67(2) = 6929$ #