INFOPRESS

EASY NOTE

Math ม.ปลาย

+ วิเคราะห์โจทย์เข้ม มั่นใจเต็ม 100

ทบทวนง่าย ครบ เน้นออกสอบ | เห็นภาพใหญ่เชื่อมโยงไปสู่คำตอบ | เน้นตัวอย่างและวิเคราะห์โจทย์เข้ม

ทบทวนเนื้อหาอย่างรวดเร็ว ครบถ้วนตามหลักสูตรใหม่ เข้าใจนิยาม ด้วยภาพและตัวอย่างที่นำไปสู่คำตอบของโจทย์
เห็นภาพรวมของทุกประเด็นที่เน้นออกสอบ ง่ายจนใครก็ทบทวนได้ในเวลาแค่ 3 วัน!

Tutor P' Bar

จัดจำหน่ายโดย IDC PREMIER

สารบัญ

PART I – สรุปเนื้อหา

กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น 1

เซต 2

[ความหมายของเซต, การเขียนเซตเชิงสัญลักษณ์, การเปรียบเทียบเซต, ขนาดของเซต, สมาชิกภายในเซต, การดำเนินการของเซต, คุณสมบัติของการดำเนินการของเซต]

ตรรกศาสตร์ 5

[การดำเนินการของประพจน์, คุณสมบัติของประพจน์ที่ "สมมูล" กัน, สัจนิรันดร์, ตัวบ่งปริมาณ + ประโยคเปิด]

จำนวนจริง 7

[สมการและอสมการ, ค่าสัมบูรณ์, เส้นจำนวน, พหุนาม, เทคนิค +, −, + ในการแก้อสมการ, การดำเนินการ]

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 11

[ผลคูณ Cartesian, ความสัมพันธ์, ประเภทของฟังก์ชัน, ฟังก์ชันประกอบ, ฟังก์ชันอินเวิร์ส]

Exponential & Logarithm 13

เรขาคณิตวิเคราะห์ 14

[Mapping, ระบบพิกัดฉาก, เส้นตรง]

ภาคตัดกรวย 16

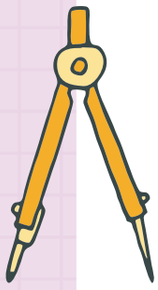
[วงกลม, พาราโบลา, วงรี, ไฮเพอร์โบลา]

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 19

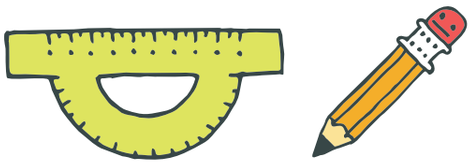
[สามเหลี่ยมมุมฉาก, กฎทางตรีโกณมิติ, วงกลมหนึ่งหน่วย, มุมเรเดียน, ฟังก์ชันตรีโกณมิติ, Arcfunction]

เมทริกซ์ 22

[พีชคณิตของเมทริกซ์, เมทริกซ์ทรานสโพส, Determinant, เมทริกซ์ผกผัน, ระบบสมการเชิงเส้น]



preface.indd 1 8/18/21 1:48 PM



เวกเตอร์ 25

[พีชคณิตของเวกเตอร์, เวกเตอร์ในระบบพิกัด]

จำนวนเชิงซ้อน 27

[นิยามจำนวนเชิงซ้อน, การดำเนินการในจำนวนเชิงซ้อน, ระบบพิกัดเชิงขั้ว, ค่าสัมบูรณ์, เศษส่วนจำนวนเชิงซ้อน, สมการ/อสมการพหุนามเชิงซ้อน]

หลักการนับเบื้องต้น 30

[หลักการบวก, หลักการคูณ, Factorial, การนำเข้า/หักออกในเหตุการณ์ย่อย, Permutation, Combination, ทฤษฎีบททวินาม]

ความน่าจะเป็น 34

[เซตเหตุการณ์]

ลำดับ & อนุกรม 35

[ลำดับ, ลำดับพิเศษ, Limit, อนุกรม, Summation, การประยุกต์]

Calculus 39

[ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน, อนุพันธ์ของฟังก์ชัน, ค่าสุดขีด, ปริพันธ์ของฟังก์ชัน]

สถิติศาสตร์ 43

[ความรู้พื้นฐาน, การนำเสนอข้อมูลเชิงคุณภาพ, การนำเสนอข้อมูลเชิงปริมาณ, ค่ากลางของข้อมูลจากตารางความถี่, แผนภาพจากตารางความถี่, การวัดการกระจายข้อมูล, แผนภาพการกระจาย]

การแจกแจงความน่าจะเป็น 51

[ตัวแปรสุ่ม, การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม, ค่าคาดหมาย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, การแจกแจงไม่ต่อเนื่อง, การแจกแจงต่อเนื่อง, การแจกแจงปกติ, ค่ามาตรฐาน]

PART II – แนวข้อสอบ

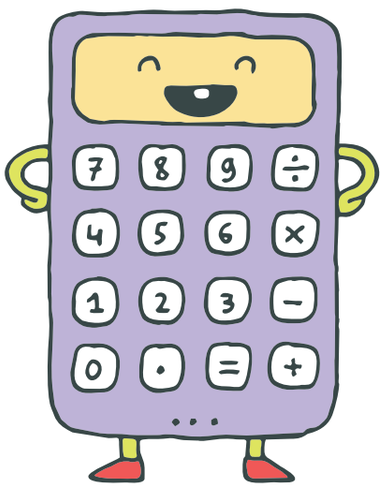
แนวข้อสอบวัดความเข้าใจ 55

แนวข้อสอบ Mathematical Literacy 59

preface.indd 2 8/18/21 1:48 PM

Part 1

สรุปเนื้อหา



Set

- กลุ่มของสิ่งต่างๆ
- เป็น **"อนิยาม"** (ไม่มีนิยามที่ชัดเจนและแน่นอน)

ควรรู้ : การกำหนดให้เซตเป็น "อนิยาม" เนื่องมาจากนักคณิตศาสตร์ถือว่าเซตเป็น **"สิ่งพื้นฐานที่สุด"** (เทียบได้กับสัจพจน์) ในวิชาคณิตศาสตร์

ความหมายของเซต

A = เซตที่ประกอบไปด้วยวันใน 1 สัปดาห์

Symbolic form (เชิงสัญลักษณ์)

เซต

$A = \{$ จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์, อาทิตย์ $\}$

"สมาชิก" ในเซต

เป็นสมาชิกของ

พฤหัสบดี $\in A$

เสาร์ $\in A$

ไก่แจ้ $\notin A$

"ไม่" เป็นสมาชิกของ

Venn-Diagram (แผนภาพเวนน์)

"สมาชิก" ในเซต

A

ศุกร์ อังคาร จันทร์ พฤหัสบดี พุธ เสาร์ อาทิตย์

เซต

เซตว่าง : เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย ($\{\}$ หรือ $\varnothing$)

Ex : เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 0 = $\varnothing$

การเขียนเซตเชิงสัญลักษณ์

แจกแจงสมาชิก

ใช้เครื่องหมาย "ปีกกา" { } ครอบสมาชิก

เซตจำกัด เซตที่นับจำนวนสมาชิกได้ทั้งหมด

$B = \{$แดง, ขาว, น้ำเงิน$\}$

เซตอนันต์ เซตที่ไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้ทั้งหมด

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

บอกเงื่อนไขของสมาชิก

$B = \{x \mid x$ เป็นสีบนธงชาติไทย$\}$

เซตของจำนวนนับ

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 10\}$

เซตของจำนวนเต็ม

$D = \{x \in \mathbb{Z}\}$

ควรรู้ : สัญลักษณ์ของเซตทางคณิตศาสตร์ที่ควรรู้

$\mathbb{N}$: เซตจำนวนนับ, $\mathbb{Z}$: เซตจำนวนเต็ม (ในอดีตจะใช้ $\mathbb{I}$),
$\mathbb{Q}$: เซตจำนวนตรรกยะ, $\mathbb{Q}'$: เซตจำนวนอตรรกยะ,
$\mathbb{R}$: เซตจำนวนจริง

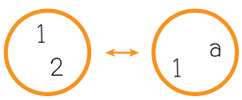
การเปรียบเทียบเซต

$A = B$

(เซต A **"เท่ากับ"** เซต B)

ถ้าสมาชิกในเซต B ทุกตัว เป็นสมาชิกในเซต A

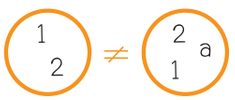
$A \leftrightarrow B$



(เซต A **"เทียบเท่ากับ"** เซต B)

ถ้าสมาชิกในเซต B อย่างน้อย 1 ตัว ไม่เป็นสมาชิกในเซต A แต่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

$A \neq B$



(เซต A **"ไม่เท่ากับ"** เซต B)

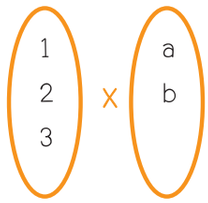
ถ้าสมาชิกในเซต B อย่างน้อย 1 ตัว ไม่เป็นสมาชิกในเซต A

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

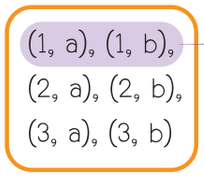
เมื่อพูดถึง "ฟังก์ชัน" มักจะเกี่ยวข้องกับ **"การบอกเซต Domain และ Range" เป็นหลัก** โจทย์จึงมักพูดถึงการหาเซตคำตอบในโจทย์ด้วย

ผลคูณ Cartesian

เซตคู่อันดับทั้งหมด



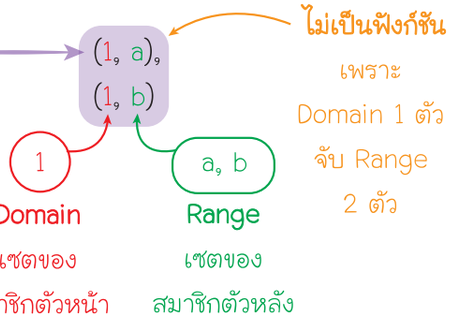
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$



A×B

ความสัมพันธ์

สับเซตของผลคูณ Cartesian

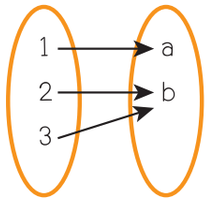


ฟังก์ชัน (Function) = ความสัมพันธ์ที่สองคู่อันดับใดๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน สมาชิกตัวหลัง "ต้องเหมือนกันด้วย" หรือ Domain แต่ละตัว จับ Range ได้ค่าเดียว

ประเภทของฟังก์ชัน

ทั่วถึง

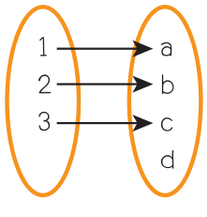
ใช้สมาชิกใน**เซต B ทุกตัว**



$f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

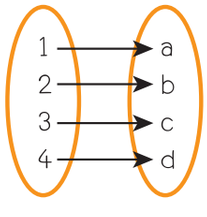
1-1

สมาชิกเซต A และ B **แต่ละตัวจับคู่กัน**



$f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$

1-1 & ทั่วถึง



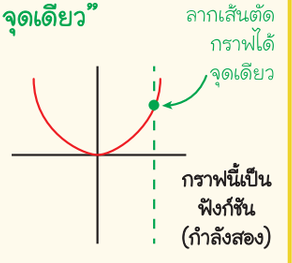
$f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} B$

ตัวผกผัน (Inverse) = การ**สลับสมาชิกตัวหน้าและหลังของคู่อันดับใน r**

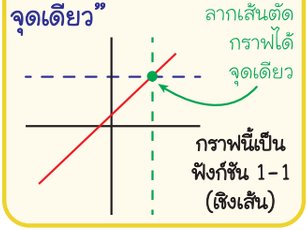
หรือ $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

การมองฟังก์ชันในรูปกราฟ

เราสามารถมองกราฟว่าเป็น**ฟังก์ชัน**จากการ **"ลากเส้นแนวตั้ง แล้วกราฟตัดแค่จุดเดียว"**



ถ้าเป็นฟังก์ชัน 1-1 จะ **"ลากเส้นแนวนอน แล้วกราฟตัดจุดเดียว"**



part1.indd 11 8/18/21 1:47 PM

แผนภาพการกระจาย

ลง **"จุด"** เพื่อหา **"แนวโน้มความสัมพันธ์เชิงเส้น"** (สหสัมพันธ์) ที่มีร่วมกันของตัวแปรที่สนใจ 2 ตัว

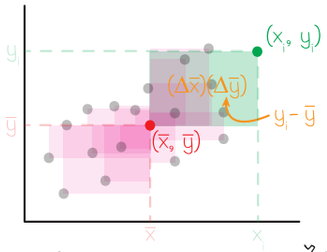
สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ Pearson (มีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1)

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_x S_y}$$

พท. สี่เหลี่ยมในกราฟ

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรในแนวแกน x

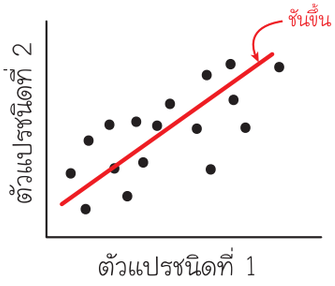
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรในแนวแกน y

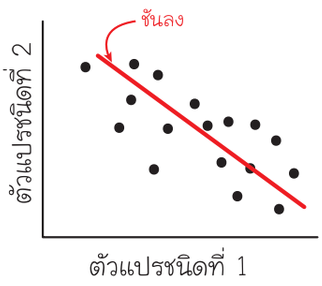


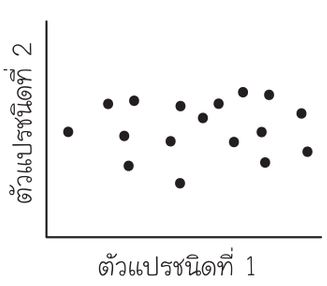
Pearson's r-correlation เทียบได้กับการหา "**พื้นที่การกระจายของข้อมูล**โดยเฉลี่ย"

คุณสมบัติของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$r > 0$ (เป็น +)	$r < 0$ (เป็น -)	$r = 0$
ตัวแปรทั้ง 2 ชนิด **มีผลตามกัน**	ตัวแปรทั้ง 2 ชนิด **มีผลตรงข้ามกัน**	ตัวแปรทั้ง 2 ชนิด **ไม่มีผลร่วมกันในเชิงเส้น**







Ex : ตัวแปรที่ 1 = ปริมาณนมที่ดื่ม
ตัวแปรที่ 2 = ความสูง
ยิ่งดื่มนมมาก ความสูงก็จะมาก

Ex : ตัวแปรที่ 1 = ปริมาณเกลือในดิน
ตัวแปรที่ 2 = จำนวนต้นไม้ที่รอด
ยิ่งเกลือในดินมาก ต้นไม้จะตายไว (ดินเค็ม)

ควรรู้ : ยิ่ง $|r|$ เข้าใกล้ 1 จุดข้อมูลจะยิ่งเป็น "เส้นตรง" มากขึ้น

ข้อควรระวัง : สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน ใช้แสดงแนวโน้มของข้อมูลที่มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งถ้ากรณีใดที่ได้ $r = 0$ ไม่ได้แสดงว่าตัวแปรที่ 1 และ 2 ไม่มีความสัมพันธ์กัน แต่อาจจะมีความสัมพันธ์ในรูปแบบอื่น เช่น พาราโบลา หรือ Exponential ก็ได้

part1.indd 50 8/18/21 1:47 PM

การแจกแจงความน่าจะเป็น

ตัวแปรสุ่ม

ฟังก์ชันที่เปลี่ยน Sample Space → ตัวเลข

ต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนจริง

Ex : การชั่ง, ตวง, วัด ฯลฯ

ไม่ต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่มที่นับจำนวนได้

Ex : การทอยเหรียญ, โยนลูกเต๋า ฯลฯ

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

การสร้างตารางเพื่อแจกแจงความน่าจะเป็นให้เหมาะสมกับตัวแปรสุ่มแต่ละค่า

Ex : จงแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มจากการโยนเหรียญ 2 เหรียญ

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งของการขึ้น “หัว” จะได้

กรณีที่ 1 X = 0 **(ไม่ขึ้นหัวเลย)** → (ก้อย, ก้อย) (1 วิธี) → $P(X=0)=\frac{1}{4}$

กรณีที่ 2 X = 1 **(ขึ้นหัว 1 เหรียญ)** → (หัว, ก้อย), (ก้อย, หัว) (2 วิธี) → $P(X=1)=\frac{2}{4}$

กรณีที่ 3 X = 2 **(ขึ้นหัว 2 เหรียญ)** → (หัว, หัว) (1 วิธี) → $P(X=2)=\frac{1}{4}$

จะได้การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มจากการโยนเหรียญ 2 เหรียญ คือ

x	0	1	2
P(X = x)	0.250	0.500	0.250

ค่าคาดหมาย

ค่าเฉลี่ย ของตัวแปรสุ่ม

สำหรับค่าที่เป็นไปได้ n ค่าของตัวแปรสุ่ม X

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$$

x_i : ความน่าจะเป็นของ x_i

i : ค่าของตัวแปรสุ่มที่ i

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

สำหรับค่าที่เป็นไปได้ n ค่าของตัวแปรสุ่ม X

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu_X)^2 P(X=x_i)}$$

x_i : ค่าคาดหมาย

$P(X=x_i)$: ความน่าจะเป็นของ x_i

i : ค่าของตัวแปรสุ่มที่ i

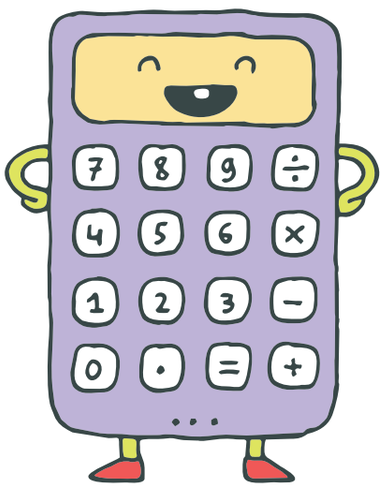
ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X : σ_X^2

ควรรู้ : ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม เรียกได้อีกชื่อว่า **“โมเมนต์รอบศูนย์กลางลำดับที่ 2”** ซึ่งหมายถึงการวัดค่าการแจกแจงความน่าจะเป็นรอบค่าเฉลี่ยนั่นเอง

part1.indd 51 8/18/21 1:47 PM

Part 2

แนวข้อสอบ



แนวข้อสอบวัดความเข้าใจ

3. ให้ $z_1 = \frac{1+7i}{(2-i)^2}$ และ $z_2 = \frac{1+3i}{1-2i}$ เมื่อ $i^2 = -1$ ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $|az_1 + b\overline{z}_2| = 2$ แล้วค่าของ a^2+b^2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

a. 1 (b.) 2 c. 4 d. 8 e. 12

วิธีคิด ทำอย่างไรก็ได้ให้ตัวส่วนไม่ติด i

$$z_1 = \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{1+7i}{4-4i+(-1)} = \frac{1+7i}{(3-4i)}\frac{3+4i}{3+4i} = -1+i \qquad z_2 = \frac{1+3i}{1-2i} = \frac{1+3i}{(1-2i)}\frac{1+2i}{1+2i} = -1+i \longrightarrow \overline{z}_2 = -1-i$$

$$|az_1 + b\overline{z}_2| = |a(-1+i)+b(-1-i)| = |(-a-b)+(a-b)i| = \sqrt{(-a-b)^2+(a-b)^2}$$

$$= \sqrt{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)} = 2$$

$$2(a^2+b^2) = 4 \longrightarrow a^2+b^2 = 2$$

4. ในการแข่งไพ่โป๊กเกอร์ชนิดแจก 5 ใบครั้งหนึ่ง ถ้า 007 ต้องการเอาชนะคนทั้งวงทั้งหมด จะต้องได้ไพ่ในชุด “Royal Flush” ซึ่งประกอบด้วย A, K, Q, J, 10 ที่มีดอกเดียวกัน หากในเกมนั้นไม่มีคนในวงได้ Royal Flush เลย โอกาสที่ 007 จะได้ไพ่เป็น Royal Flush ประมาณกี่ %

a. 0.15% b. 0.015% c. 0.0015% (d.) 0.00015% e. 0.000015%

วิธีคิด การเล่นไพ่ Poker จะมีการแจกไพ่ 5 ใบ ดังนั้น

จำนวนวิธีแจกไพ่ 5 ใบ $(n(S)) = C_{52,5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52x51x50x49x48}{5x4x3x2} = 2,598,960$ วิธี

เลือกดอก 1 ดอกจาก 4 ดอก

จำนวนวิธีที่จะได้ Royal Flush $(n(E)) = \binom{4}{1} = 4$ วิธี (ได้ดอกใดดอกหนึ่งแล้ว ที่เหลือต้องตามให้ครบ)

โอกาสที่จะได้ไพ่ 5 ใบเป็น Royal Flush $(n(E)) = \frac{4}{2,598,960} = \frac{1}{649,740} \approx \frac{1}{650,000} \times 100\%$

$$\approx \frac{\overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{10}{\cancel{65}}} \times 10^{-4}$$

$$\approx 0.0002\%$$

ข้อสังเกต :
โจทย์ที่มีลักษณะแบบนี้ เป็นโจทย์ที่มักจะเน้นเรื่อง **“การประมาณคำตอบ”** สังเกตได้จากในตัวเลือกทุกคำตอบ **“เป็นตัวเลขเดียวกันหมด”** ต่างกันแค่ **“ตำแหน่งทศนิยม”** ทำให้เราสามารถประมาณคำตอบเพื่อความรวดเร็วได้

part2.indd 57 8/18/21 1:48 PM

แนวข้อสอบ Mathematical Literacy

1. ในยุทธการผาแดง โจโฉต้องการที่จะยึดเมืองเกงจิ๋ว ซึ่งเป็นหัวเมืองที่มีชัยภูมิติดกับแม่น้ำที่สามารถเดินทางได้ด้วยการล่องเรือเข้าไปเป็นแนวยาว ซึ่งเขาเองก็วิเคราะห์ตามหลักพิชัยสงคราม ก็พบว่าถ้าทั้งสองฝั่ง(p)ของแม่น้ำมีหน้าผาสูงชัน และฝั่งศัตรูมีพลธนูฝีมือดี(q)แล้ว การจัดทัพในแนวตั้งรับจะสามารถ(r)เอาชนะศัตรูได้ อย่างไรก็ตามเพื่อความไม่ประมาท โจโฉจำเป็นที่จะต้องปรึกษากับเสนาธิการทั้ง 3 คน ได้แก่ บังทองที่เคยเป็นเสนาธิการอยู่ในฝ่ายศัตรู ชัวมอ และเตียวอุ๋น ที่ได้เข้ามาสวามิภักดิ์หลังจากที่โจโฉควบคุมไพร่พลมาเป็นจำนวนมาก

อย่างไรก็ตามได้มีข่าวลับจากทหารที่สืบทราบมาได้ว่า บุคคลทั้งสามนี้มีอยู่ 1 ในนั้นที่คิดทรยศ ทำให้โจโฉได้เรียกเสนาธิการทั้ง 3 เข้ามาปรึกษาเพื่อต้องการจะจับพิรุธ ซึ่งจากการปรึกษาในเรื่องการวางแผนรบ จึงได้ผลลัพธ์ดังนี้

บังทอง : ถ้าการจัดทัพในแนวตั้งรับจะไม่สามารถเอาชนะศัตรูได้ แล้วจะไม่มีกรณีที่ทั้งสองฝั่งของแม่น้ำมีหน้าผาสูงชันและฝั่งศัตรูมีพลธนูฝีมือดี

ชัวมอ : ตามความเห็นของข้า การจัดทัพในแนวตั้งรับจะสามารถเอาชนะศัตรูได้ หรือถ้าทั้งสองฝั่งของแม่น้ำมีหน้าผาสูงชัน แล้วฝั่งศัตรูจะไม่มีพลธนูฝีมือดี

เตียวอุ๋น : แต่ข้าพเจ้าคิดว่า การจัดทัพในแนวตั้งรับจะสามารถเอาชนะศัตรูได้ หรือถ้าฝั่งศัตรูไม่มีพลธนูฝีมือดี แล้วทั้งสองฝั่งของแม่น้ำไม่มีหน้าผาสูงชัน

ถ้านักเรียนเป็นโจโฉ จงหาว่าใครที่มีโอกาสเป็นไส้ศึกได้มากที่สุดใน 3 คนนี้

a. บังทอง　　b. ชัวมอ　　c. เตียวอุ๋น

d. ชัวมอและเตียวอุ๋น　　e. บังทองและชัวมอ

วิธีคิด โจทย์ให้หา "ไส้ศึก" ดังนั้น จึงควรพิจารณา "ค่าความจริง" จากคำพูดที่ทั้ง 3 คนเล่า โดยถ้าเราต้องการจะรู้ว่า **"ใครมีความแตกต่าง"** ก็ควรจะดูจาก **"ความสมมูลกัน"** ของคำพูดทั้ง 3 คน

หา **"ความสมมูลกันของประพจน์"**

คำพูดของโจโฉ $= (p \wedge q) \to r$

จะได้ $(p \wedge q) \to r \equiv \sim r \to \sim(p \wedge q)$ (คำพูดของบังทอง)

$\equiv r \vee \sim p \vee \sim q$

$\equiv r \vee (p \to \sim q)$ (คำพูดของชัวมอ)

$\equiv r \vee (q \to \sim p) \not\equiv r \vee (\sim q \to \sim p)$ (คำพูดของเตียวอุ๋น)

จะเห็นว่าคำพูดของเตียวอุ๋นไม่สมมูลกับทั้งสามคน เตียวอุ๋นจึงมีโอกาสเป็นไส้ศึกได้มากที่สุด